ÍNDICE

Conteúdo **Pág.**

Conjunto dos números naturais; 02
Operação em N : adição e subtração , expressão numéricas em N, multiplicação e divisão , potenciação e radiciação; 02
Múltiplos e divisores: MMC e MDC 05
Número fracionários: redução e comparação de frações . operação com frações; 07
Numerais decimais: operação de frações , operação com frações : 08
Razões e proporções: aplicação das proporções, grandeza proporcional, regra de três: 20
Expressões algébricas: operações algébricas, produtos notáveis, fatoração; 10
Conceito de Função 14
Função do 1º grau 16
Taxa de Porcentagem 24
Juros Simples 26
Ângulos congruentes 27
Equações do 2º Grau 28
Comprimento da Circunferência 31
Medida de Superfície 32
Relações Métricas no Triângulo Retângulo 39
Ângulos agudos e ângulos obtusos 44
Ângulos complementares 45
Ângulos suplementares 47
Ângulo opostos pelo vértice 48
Classificação dos polígonos 51
Bibliografia a Consultar 56

Número Natural

Não levando em conta a qualidade dos elementos que constituem os conjuntos que estão em correspondência biunívoca, verificamos que eles possuem uma propriedade comum – a quantidade de elementos ou o número de elementos.

A propriedade comum aos conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca é o que chamamos de número natural.

Os números naturais constituem um conjunto denominado conjunto dos números naturais . indica-se pela letra **N**.

N = { 0, 1 ,2, 3 , 4 . . . }

N* = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 . . . } é o conjunto dos números naturais excluído o 0.

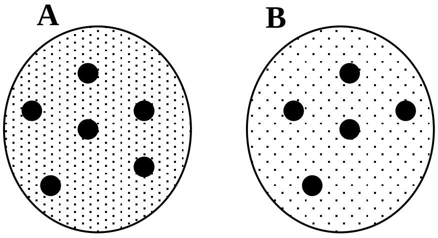
Operações fundamentais com números naturais

Adição

A reunião de dois conjuntos A e B disjuntos (sem elementos comuns) é constituída pelos elementos que pertencem a A ou a B.

Sejam :

n(A) = 6 – número de elementos do conjunto A
n(B) = 5 – número de elementos do conjunto B



Daí resulta:
n(A U B) = 11 número de elementos do conjunto reunião.
Vemos que : n(A) + n(B) = n (A U B ou 6 + 5 = 11

A operação que fizemos chama-se adição, 6 e 5 são as parcelas e o resultado da operação , 11 , é a soma .

A adição faz corresponder a dois números dados em certa ordem (par ordenado) um único número que é a soma do primeiro com o segundo.

Atividade de Classe

1. Responda:

a)Como se chamam os termos de uma adição?
b) Na igualdade 36 + 64 = 100 , como é chamado o número 100 ?
c) Na igualdade 21 + 69 = 90 , como se chamam os números 21 e 69 ?

2. Calcule:

a) 85 + 135
b) 3025 + 4975
c) 2001 + 299
d) 3025 + 4975
e) 10906 + 3286
f) 43205 + 16895

3. Resolva os problemas:

a) Helena tinha um saldo de Cr$ 172 906,00 na sua caderneta de poupança.. No último trimestre, recebeu Cr$43 218,00 de juros e correção monetária. Com que saldo ficou?

b) Júnior comprou um aparelho de som para o seu carro por Cr$ 165 400,00. A seguir, pagou Cr$ 13 500,00 para a sua instalação . Quanto gastou ao todo?

c) De acordo com o censo de 1980, Rondônia , o mais novo estado da Federação, tem uma população urbana de 233 301 habitantes e uma população rural de 259 509 habitantes. Qual é a população total de Rondônia ?

Propriedade estruturais

a) Fechamento : A soma de dois números naturais é um número natural .

$5 \in N$, $6 \in N \Rightarrow (5 + 6) \in N$

b) Comutativa: A ordem das parcelas não altera a soma.

$$\left.\begin{matrix} 4 + 8 = 12 \\ 8 + 4 = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 + 8 = 8 + 4$$

c) Elemento neutro: No conjunto dos números naturais , zero é chamado elemento neutro da adição.

$5 + 0 = 5$; $0 + 7 = 7$

d) Associativa: A adição de três parcelas pode ser feita associando –se as duas primeiras ou as duas últimas parcelas indiferentemente.

$(5 + 13) + 4 = 5 + (13 + 4)$

Atividade de Classe

1. Nas relações abaixo, diga qual é a propriedade estrutural que está sendo empregada:

a) $9 \in \mathbf{N}$, $15 \in \mathbf{N} \Rightarrow (9 + 15) \in \mathbf{N}$

b) $8 + 7 = 7 + 8$

c) $18 + 0 = 18$

d) $(22 + 15) + 17 = 22 (15 + 17)$

e) $0 + 9 = 9$

f) $32 + 18 = 18 + 32$

2. Copie as sentenças seguintes, completando-as para que fiquem verdadeiras:

a) Numa adição, a ordem das parcelas não altera a ....

b) O elemento neutro da adição é o número ....

c) A soma de dois números naturais é um número ....

Multiplicação

Produto de dois números

Consideremos a soma de 5 parcelas iguais a 3.

$3 + 3 + 3 + 3 +3 = 15$

Esta soma pode ser indicada por 3 x 5 = 15 (ou 3 . 5 = 15) que se lê : “3 vezes 5 igual a 15”, e recebe o nome de produto. Pode –se dizer que produto é a soma de parcelas iguais e a operação é a multiplicação . Então:

MULTIPLICAR É SOMAR PARCELAS IGUAIS

A parcela que se repete, chama-se multiplicando; o número de parcelas repetidas, multiplicador e o resultado, produto.

3 x 5 = 15

→ produto
→ multiplicador
→ multiplicador

multiplicador, multiplicador } são também chamados fatores

Não se pode falar em produto, se o multiplicador for 1 ou 0 . Entretanto , aceita-se que a multiplicação de qualquer número por 1 dá o próprio número e a multiplicação de qualquer número por zero dá zero. Assim:

3 x 1 = 3; 3 x 0 = 0

Pode-se dizer que a multiplicação faz corresponder a dois números dados em certa ordem (par ordenado) um terceiro número que é o produto do primeiro pelo segundo.

Assim: $(3 , 5) \xrightarrow{X} 15$

ao par ordenado (3, 5) , a multiplicação faz corresponder o número 15 qual é o produto de 3 por 5

3. Calcule:

a) 83 x 35
b) 123 x 42
c) 75 x 39
d) 209 x 78
e) 47 x 26
f) 625 x 25

4. Resolva os problema:

a) Em junho de 1983, o litro de álcool hidratado custava Cr$ 178,00. O tanque de um Volkswagem Voyage comporta 52 litros. Quanto se gastava para encher o tanque de um Voyage?
b) Sabemos que 1 minuto tem 60 segundos. Quantos segundos há em 15 minutos
c) O salário – família recebido por um trabalhador é de Cr$ 1 738,00 por filho menor de 14 anos . Quanto receberá um operário que tem 56 filhos nessa condições?

Propriedade estruturais

a) Fechamento : O produto de dois números naturais é sempre um número natural.
   $2 \in \mathbf{N}, 5 \in \mathbf{N} \Rightarrow 2 \times 5 \in \mathbf{N}$

b) Comutativa : A ordem dos fatores não altera o produto.
   $\left.\begin{array}{l} 7 \times 4 = 28 \\ 4 \times 7 = 28 \end{array}\right\} 7 \times 4 = 4 \times 7$

c) Elemento neutro: O numero 1 multiplicado por qualquer número e em qualquer ordem, dá por produto aquele mesmo número.
   5 x 1 = 1 x 5 = 5
d) Associativa: Numa multiplicação de três fatores , podem-se associar os dois primeiros ou os dois últimos, indiferentemente .

$$\left.\begin{array}{l}(4 \text{ x } 5) \text{ x } 2 = 20 \text{ x } 2 = 40\\ 4 \text{ x } (5 \text{ x } 2) = 4 \text{ x } 10 = 40\end{array}\right\}\ (4 \text{ x } 5) \text{ x } 2 = 4 \text{ x } (5 \text{ x } 2)$$

Atenção! Se um produto de três ou mais fatores um deles é zero, o produto é igual a zero:

3 x 3 x 5 = 0 ; 8 x 12 x 0 x 7 = 0

e) Distributiva da multiplicação em relação à adição (ou subtração):

O produto de um número por uma soma (ou diferença) pode ser obtido, multiplicando –se o número por cada um dos termos da soma (ou diferença) e adicionando-se (ou subtraindo –se) os produtos parciais. Assim:

$$\left.\begin{array}{l}9 \text{ x } (3 + 2) = 9 \text{ x } 5 = 45\\ 9 \text{ x } 3 + 9 \text{ x } 2 = 27 + 18 = 45\end{array}\right\}\ 9 \text{ x } (3 + 2) = 9 \text{ x } 3 + 9 \text{ x } 2$$

$$\left.\begin{array}{l}4 \text{ x } (7 - 3) = 4 \text{ x } 4 = 16\\ 4 \text{ x } 7 - 4 \text{ x } 3 = 28 - 12 = 16\end{array}\right\}\ 4 \text{ x } (7 - 3) = 4 \text{ x } 7 - 4 \text{ x } 3$$

Máximo Divisor Comum

Consideremos os conjuntos dos divisores, respectivamente, dos números 40 e 16.

D(40) = {1,2,4,5,8,10,20,40}

D(16) = {1,2,4,8,16}

Observando que D(40)∩D(16) = { 1,2,4,8}, podemos afirma que :

a) Os divisores comuns de 40 e 16 são 1,2,4,8.
b) O maior divisor comum de 40 e 16 é 8.
   Então, o número 8 é chamado máximo divisor comum de 40 e 16, que será representado por mdc (40 , 16) = 8.
   Daí podemos dizer que :

Dados dois ou mais números , não simultaneamente nulos, chama-se máximo divisor comum desses números o maior dos seus divisores comuns.

Atividade de classe

Determine:

a) D (15)
   D (18)
   D (15) ∩ D (18)
   mdc (15,18)

b) D (32)
   D (28)
   D (32) ∩ D (28)
   mdc (32 , 28)

c) D (54)
   D (42)
   D (24)
   D (54) ∩ D (42) ∩ D (24)
   mdc(54, 42, 24)

d) D (45)
   D (36)
   D (27)
   D (18)
   D(45)∩D(36)∩D(27)∩D(18)
   mdc (45,36,27,18)

Técnicas para o cálculo do mdc
Vamos determinar o máximo divisor comum de 60 e 24.
Á sabemos que:
D(60) = { 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60}
D(24) = {1,2,3,4,6,8,12,24}
D (60) ∩ D (24) = {1,2,3,4,6,12}
mdc (60 , 24) = 12.

Mínimo Múltiplo Comum

Consideremos os conjuntos dos múltiplos, respectivamente, dos números 6,8 e 12:
M(6) = { 0,6,12,18,24,30,36,42,48,54,60 . . . }
M(8) = {0,8,16,24,32,40,48,56,64 . . .}
M(12) = { 0,12,24,36,48,60 . . . }
Observando que M (6) ∩ M(8) ∩ M(12) = {0,24,48 . . .}, podemos afirmar que :

a) Os múltiplos comuns de 6,8 e 12 são 0,24,48 . . .
b) O menor múltiplo comum, diferente de zero, de 6 ,8, e 12 é 24.
   Então , o número 24 é chamado mínimo múltiplo comum de 6,18 e 12 , que representaremos pr
   mmc (6,8,12) = 24

Dados dois ou mais números, diferentes de zero, chama-se mínimo múltiplo comum desse números o menor de seus múltiplos comuns, diferente de zero.

Atividade de Classe.

Determine o que pede:

a)
M (9)
M(6)
M(9) ∩ M(6)
mmc (9,6)

c)
M(10)
M (8)
M (10) ∩ M (8)
mmc (10,8)

d)
M (6)
M (15)
M (10)
M (6) ∩ M(15) ∩ M(10)
mmc (6,15,10)

d)
M(12)
M(18)
M(9)
M(36)
M(12) ∩ M(18) ∩ M(9) ∩ M(36)
mmc (12,18,9,36)

Técnicas para o cálculo do mmc

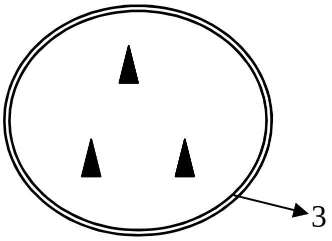
Podemos determinar o mmc de dois ou mais números diferentes de 0 pelo processo da decomposição em fatores primos, conforme a seguinte regra:

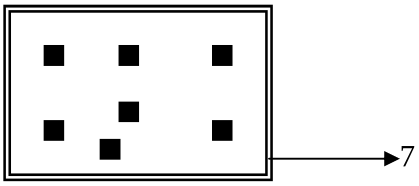
a) Decompõe-se cada número em fatores primos.
b) O mmc será o produto de todos os fatores comuns e não comuns, cada um deles elevados ao maior expoente.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

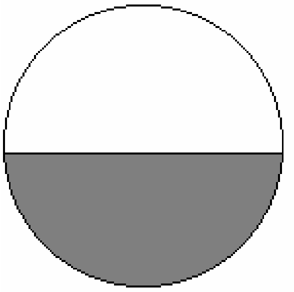
MMC = $2^3 \times 3 = 24$

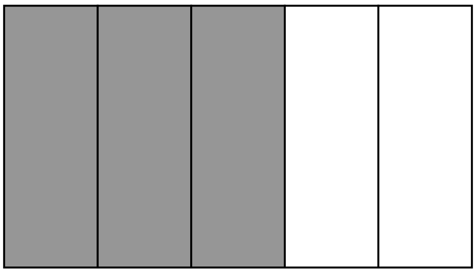
A idéia de número fracionário
Para exprimirmos o número de elementos de um conjunto finito, empregamos um só número natural.





Para expressarmos, matematicamente , uma parte ou algumas parte iguais de um todo, vamos usar um par ordenado de números naturais.





Lê-se: meio ou um meio
Indica-se: $\frac{1}{2}$.

Lê-se: três quintos
indica-se : $\frac{3}{5}$.

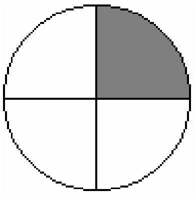
Os pares de números naturais $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ são chamados frações ou números fracionários.

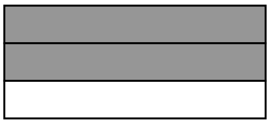
Então:

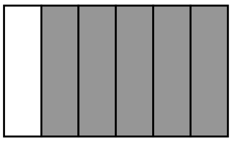
Chama-se fração todo par ordenado de números naturais com o segundo ≠ 0 onde:

a) o primeiro número indica quantas partes tomamos do inteiro.
b) O segundo número indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido.

Atividade de Classe
Observando os exemplos dados, expresse qual fração da figura toda é a parte colorida:

a)


b)


c)


Operações

Adição $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3\ +\ 4}{6} = \frac{7}{6}$ mmc = 6

Subtração $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3\ -\ 2}{4} = \frac{1}{4}$ mmc = 4

Multiplicação $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$

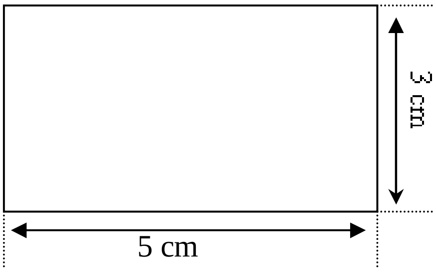
Divisão $\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{15}{28}.$

Expressões literais ou algébricas

Introdução

Sabemos que podemos usar letra (a, b, c, x, y . . .) para representar números e que são denominados numerais literais.

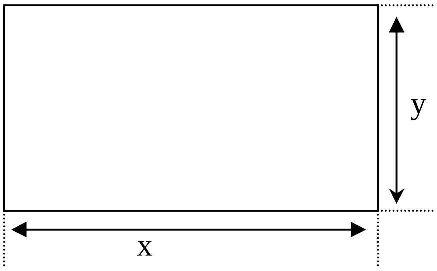
Assim, observe as seguintes situações:
1ª situação: A figura abaixo nos mostra um retângulo cujas dimensões são 5 cm e 3 cm.



A medida do perímetro do retângulo é dada pela expressão 2.(5) + 2 .(3), que contém apenas números.

Expressões deste tipo são chamadas **expressões numéricas.**

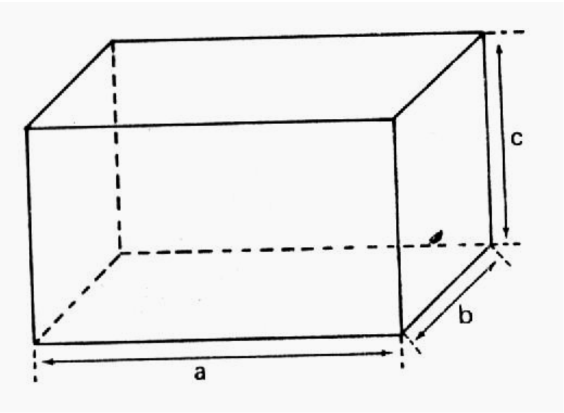
2º situação: A figura abaixo nos mostra um retângulo cujas dimensões são x e y.



A medida do perímetro do retângulo é dada pela expressão 2.x + 2 . y, que contém números e letras.

Expressões deste tipo são chamadas **expressões numéricas.**

3º situação: A figura abaixo nos mostra um bloco retangular cujas dimensões são **a**, **b**, e **c**



A medida do volume do bloco é dada pela expressão **a . b . c** que contém apenas letras.

Expressões deste tipo são chamadas **expressões literais.**

Expressões literal ou algébrica

Uma expressão matemática que contém números e letra, ou somente letras, é denominada expressão literal ou algébrica.

Exemplos

$$5x - 1 \,,\ a^2 + ab \,,\ x^2 - 2x + 1 \,,\ \frac{a - b}{2a} .$$

As letras (ou numerais literais) representam, indistintamente, um número qualquer de um conjunto numérico é , por isso, são chamadas variáveis . Usaremos, daqui por diante, a expressão **número a**, em vez da expressão

A expressão algébrica inteira e fracionária

Observe as expressões algébricas abaixo.
Identifique com a letra I as que não apresentam variáveis no denominador, e com a letra F as que apresentam variáveis no denominador:

a) $3x - 2y$	b) $\frac{x}{2} + y$	c) $x - \frac{y}{x}$
d) $\frac{1}{a + b}$.	e) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$	f) $\frac{a + 1}{2x}$
g) $\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$.	h) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$	i) $\frac{x^2 y}{10}$

você assinalou com a letra I as expressões algébricas:

$3x - 2y$, $\frac{x}{2} + y$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$, $\frac{x^2 y}{10}$

você assinalou algébricas que não contêm varáveis no denominador são denominadas **expressões algébrica inteiras**.

Você assinalou com a letra F as expressões algébrica :

$\frac{x - y}{x}$, $\frac{1}{a + b}$, $\frac{a + 1}{2x}$, $\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Expressões algébricas que apresentam variáveis no denominador são denominadas **expressões algébricas fracionárias**

Produtos Notáveis

Existem certas igualdades matemáticas, de uso freqüente no cálculo algébrico, que são denominadas produtos notáveis.

Os principais produtos notáveis são :

- Quadrado da soma de dois termos ⟶ $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b2}$

De fato , pois:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

quadrado do 2º termo
2º termo
duas vezes o produto dos termos
1º termo
quadrado do 1º termo

Daí , a seguinte

Regra

O quadrado da soma de sois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termos.

Exemplos

1) $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 . (2x) . (5) + (5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

- Quadrado da diferença de dois termos ⟶ $\boxed{(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2}$

De fato, pois:

$$(\underbrace{a}_{\text{1º termo}} – \underbrace{b}_{\text{2º termo}})^2 = (a – b) (a - b) = \underbrace{a^2}_{\text{quadrado do 1º termo}} – \underbrace{2ab}_{\text{duas vezes o produto dos termos}} + \underbrace{b^2}_{\text{quadrado do 2º termo}}$$

Daí, a seguinte

Regra

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos: 1) $(3x – 1)^2 = (3x)^2 – 2. (3x) (1) + (1)^2 = 9x^2 – 6x +1$

- cubo da soma de dois termos ⟶ $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

de fato, pois :

$(a + b)^3 = (a + b)^2 . (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Exemplos

1) $(a + x)^3 = (a)^3 + 3(a)^2(x) + 3(a)(x)^2 + (x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

2) $(y + 2)^3 = (y)^3 + 3(y)^2(2) + 3 (y)(2)^2 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$

- cubo da diferença de dois termos ⟶ $\boxed{(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

De fato . pois:

$(a – b)^3 = (a – b)^2 . (a – b) = (a^2 – 2ab + b^2) (a – b) = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$

Exemplo : $(x – 3)^3 = (x)^3 – 3(x)^2(3) + 3(x) (3)^2 + x^3 – 9x^2 + 27x - 27$

- Produto da soma de sois termos
  Pela sua diferença ⟶ $\boxed{(a + b) (a - b) = a^2 – b^2}$

De fato , pois 1º termo

$$(\ a + b\ )\ (\ a - b\ ) = a\ (a - b\ ) + b\ (a - b\ ) = a^2 - b^2$$

quadrado do 2º termo
quadrado do 1º termo

Daí, a seguinte

Regra

O produto da soma de dois termos pela sua diferença é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos:
1) $(\ x + 3\ )\ (\ x - 3\ ) = (x)^2 - (3)^2 = x^2 - 9$

Exercício de fixação
a) (x + 8)2
b) $(2 - 3a\ )^2$
c) $(3x + y^2)^2$
d) (1 + 5m) – (1 – 5m)
e) $(ab - c\ )^2$
f) $(\ m - 1)^3$

Fatoração

Introdução
Consideremos os seguintes problemas:
1º) Escrever o número 90 na forma de um produto indicado.
Para isso, decompomos 90 em fatores primos:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$90 = 2\ .\ 3^2\ .\ 5$

2º) Escrever a expressão 3 + 12 na forma de um produto indicado.
Para isso, usamos a propriedade distributiva da multiplicação:

$$3 + 12 = \overbrace{\underbrace{3\ .\ (\ 1 + 4\ )}} \longrightarrow 3\ .\ (\ 1 + 4\ ) = 3\ .\ 1 + 3\ .\ 4 = 3 + 12$$

forma fatorada da expressão

Assim, que escrevemos um número ou uma expressão na forma de um produto indicado, dizemos que estamos escrevendo o número ou a expressão na **forma fatorada**
Daí:

Fatorar um número u uma expressão significa decompor o número ou a expressão num produto indicado.

Surgem , então , as perguntas:

a) será que podemos fatorar um polinômio?
b) Quando podemos fazê-lo?

As respostas serão dadas no estudo desta Unidade, importantíssima pela sua aplicação no cálculo algébrico.

- **Fatoração de Polinômios**

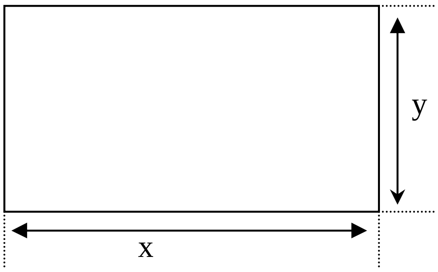
Fatorar um polinômio significa transformar esse polinômio num produto indicado de polinômios ou de monômios e polinômios.

Estudaremos os caso simples de fatoração de polinômios

1º Caso: Colocação de um fator comum em evidência

Observe as seguintes situações:

A figura abaixo nos mostra um retângulo cujas dimensões são **x** e **y**.



A medida do perímetro do retângulo pode ser representada pela expressão:

$2x + 2y$ ou $2 . (x + y)$ $\longrightarrow$ propriedade distributiva da multiplicação

então :

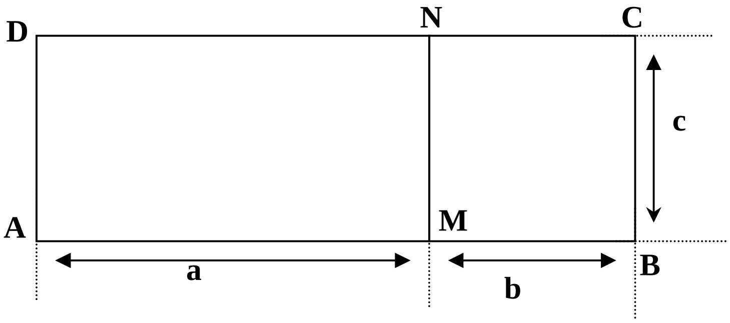
$2x + 2y = 2 . (x + y)$

Nesta igualdade, destacamos:

$2(x + y)$ é a forma fatorada da expressão $2x + 2y$,.

2 é chamado fator comum aos termos da expressão $2x + 2y$ e que foi colocado em evidência.

A figura seguinte nos mostra três retângulos: o retângulo ABCD, o retângulo AMND e o retângulo MBCN.



Facilmente , observamos que :
Área do retângulo AMND + Área do retâgulo MBCN = Área do retângulo ABCD

$$a\ .\ c\ + b\ .\ c\ =\ (\ a\ + b\ )\ .\ c$$

ou seja:
ac + ac = (a + b) c

nesta igualdade , destacamos:

(a + b) c é a forma fatorada da expressão ac + bc.
C é chamado fator comum aos termos da expressão ac + bc e que foi colocado em evidência

Consideremos, agora, o polinômio ax + bx
ax + bx = x (a + b) pela propriedade distributiva da multiplicação

O conceito intuitivo de função

O conceito de função é um dos mais importantes da matemática, tendo destaque não openas na maioria das teorias nela desenvolvida, mas também no nosso quotidiano. Por isso, vamos apresentar esse conceito primeiro informalmente, para depois formalizá-lo.

Suponha que a tabela de preços a seguir corresponda às passagens do Metrô de São Paulo:

Passagens	**Preço a Pagar**
1	50,00
2	100,00
3	150,00
4	200,00
5	250,00
6	300,00
7	350,00
8	400,00

Observe que essa tabela fixa uma dependência entre o número de passagens e o preço a pagar.

Se chamarmos de x o número de passagens e de y o preço a pagar, esses duas **grandezas** estarão relacionadas de tal forma que **para cada valor de x** existe, um correspondência , **um único calor de y**, dado pela expressão y = 50x. Dizemos, então, que **y é função de x.**

Definição

Dados dois conjuntos **A** e **B**, chama-se **função de A em B** qualquer relação entre tais conjuntos que faça corresponder , a cada elemento de **A, um e um só** elemento de **B**.

Indica-se a função de **A** em **B** com a notação.

$$f: A \rightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Isto que dizer que existe uma lei **f** que leva os elementos de **A** aos elementos de **B**, de tal modo que :

- Todo elemento de **A tem corresponde** em B;
- Todo elemento de **A tem um único correspondente** em B.

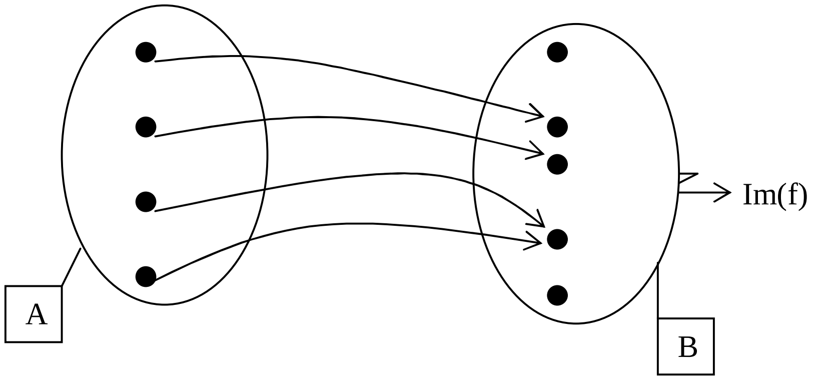
A chama-se domínio da função e se indica D (F) = A.
B chama-se contradomínio da função e se indica CD (f) = B

Se x é um elemento de **A** e **y** é o seu correspondente em **B**, dizemos que **y é a imagem de x** obtida pela função **f**, indica-se y = f (y).

Y = f (y) lê-se “ y é igual a f de x”

O conjunto de todos os valores **y** assim obtidos chama-se **conjunto imagem da função** e se representa por Im (f).

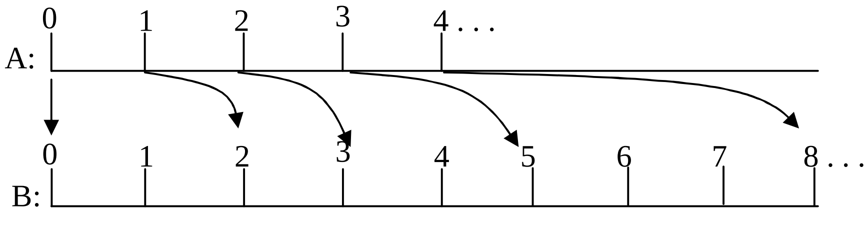
Veja o esquema.



A é o domínio da função : D(f) = A
B é o contradomínio da função : CD(f) = B
Im(f) é o conjunto imagem da função.

Exemplo:

Seja **A** o conjunto dos naturais, **B** o conjunto dos naturais e **f** a lei que a cada natural de **A faz corresponder o seu dobro em B .**



Logo :
D(f): = { 0,1,2,3,4 . . .}
CD(f) = { 0,1,2,3,4 . . .}
Im(f) = { 0,2,4,6,8 . . .}

vê-se que:
f(0) = 0
f(1) = 2
F(2) = 4
f(3) = 6
f(4) = 8

A função do 1º grau

Consideremos a seguinte função:
f: **R** → **R**
x → y = ax + b, com a e b reais e a ≠ 0

Observa-se que a expressão que define a função é ax + b , ou seja , um polinômio do 1º grau.

A essa função demos o nome de função do 1º grau ou função afim.

Raiz ou zero da função
Y = ax + b

Dada a função y = ax + b, dizemos que x é uma raiz ou zero de y = ax + b quando e somente quando o valor corresponder de y é zero

Exemplo:
a) y = 3x – 6

para x = 2 ⇒ y = 0
x = 2 é raiz de y = 3x – 6

b) y = - x
para x = 5 é raiz de y = 5 – x

de um modo geral, para a função y = ax + b , tem –se:

Y = 0 ⇔ ax + b = 0

$\Leftrightarrow x \; \frac{-b\ .}{a}$

x = $\frac{-b}{a}$ é raiz de y = ax + b

1. Primeiros exercícios de classe (faça no seu caderno).
Determine as raízes das funções dadas pelas expressões seguintes:

a) y = 5x – 15
b) y = - 12 – 2x
c) y = $\frac{3x}{4}$ - 1
d) y= $\frac{-2x}{3}$ + 6

Valores e sinais da Função y = ax + b

A função de R em R definida pela fórmula y = ax + b assume infinitos valores, quando x varia no campo real. É necessário, então , conhecer a variação desses valores.

Sinais de y = ax + b

Seja, como exemplo, y = 3x – 6. Desejamos saber para quais valores de x teremos y maior que zero, ou , ainda para que valores de **x** teremos **y** menor que zero.

$Y = 3x - 6$

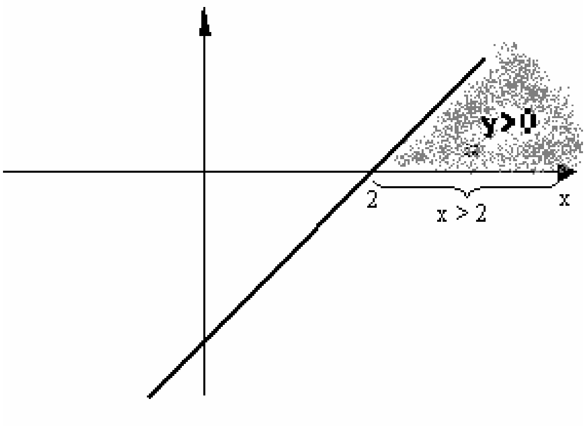
$Y > 0 \Leftrightarrow 3x > 6$

$\Leftrightarrow 3x > 6$

$\Leftrightarrow x > 2$

$\boxed{x > 2 \Rightarrow y > 0}$

graficamente



$X_0 = 2$ é raiz de y = 3x - 6

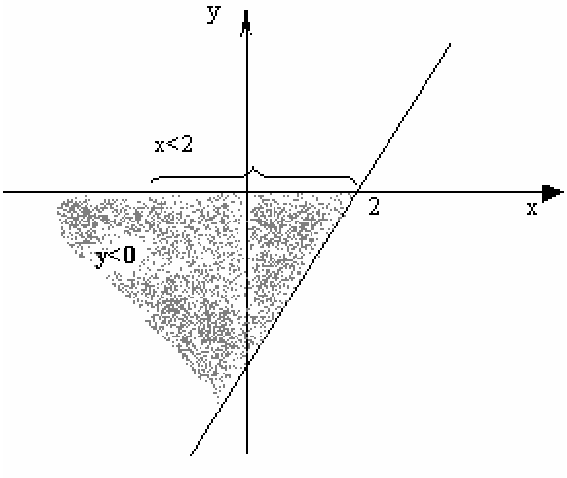
$Y = 3x - 6$

$Y < 0 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0$

$\Leftrightarrow 3x < 6$

$\Leftrightarrow x < 2$

$\boxed{x < 2 \Rightarrow y < 0}$



$X_0 = 2$ é raiz de y = 3x – 6

Primeiros exercícios de classe (faça no seu caderno)

1. Dadas as funções seguintes, determine:

I. a sua raiz;
II. os valores de x que tornam y >0 ;
III. os valores de x que tornam y > 0;
IV. o gráfico da função.

a) $y = x - 3$
b) $y = -2x - 8$
c) $y = 2x$
d) $y = 1 - \frac{x}{4}$.

Sistemas de inequações do 1º grau com variáveis reais

Sovemos que resolver um sistema de equações é determinar as soluções comuns às equações que compõem o sistema .

Da mesma maneira, resolver um sistema de inequações é determinar as soluções comuns às inequações do sistema . Mais explicitamente, podemos dizer que o **conjunto - verdade de um sistema de inequações é o conjunto intersecção dos conjuntos soluções de cada uma das inequações .**

Sistemas de inequações com uma variável real

Para resolver os sistemas de inequações com uma variável **R**, procedemos da seguinte maneira:

- Resolvermos cada uma das inequações;
- Determinamos a solução comum às inequações.

Exemplos:
Resolvamos , em R os seguintes sistemas:

1. $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

resolvendo as duas inequações, temos:

a) $x + 3 \geq 0$

$$\boxed{x \geq -3}$$

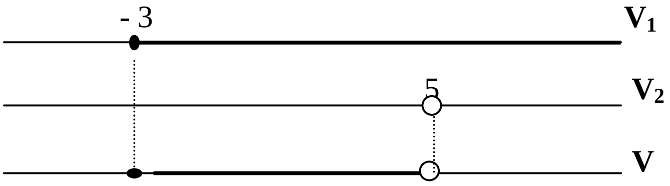
portanto: $V_1 = \{ x \in R / x \geq -3\}$

b) $x - 5 < 0$

$$\boxed{x < 5}$$

O conjunto – verdade do sistema, $V = V_1 \cap V_2$, pode ser determinado de maneira prática através da representação gráfica de V_1 e de V_2, sendo verificada , a seguir , a sua intersecção .

Assim:



Logo, a solução do sistema é dada por:

$- \quad 3 \leq x < 5$

ou $V = \{ x \in R \,/\, - 3 \leq x < 5 \}$

observação :

Como estamos trabalhando com uma única variável em **R** , a solução do sistema é um **subconjunto da reta.**

2. $\begin{cases} 3x + 4 < 1 \\ 1 - 2x < 2 \end{cases}$

resolvendo as inequações, temos:

a) $3x + 4 < 1$

$3x < 1 - 4$

$3x < -3$

$\boxed{x < -1}$

$V = \{ x \in R \,/\, x < -1 \}$

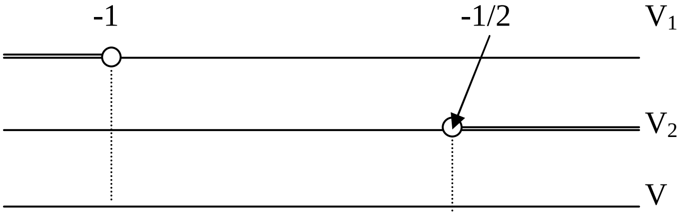
b) $1 - 2x < 2$

$- 2x < 2 - 1$

$-2x < 1$

$\boxed{x > \frac{-1}{2}}$

$V2 = \{ x \in R \,/\, x > \frac{-1}{2} \}$



Logo não existe x que satisfaça às duas inequações.
Ou V = ∅

3. $\begin{cases} 3x - 4 > 8 \\ 2x - 1 > 3 \end{cases}$

Resolvendo as inequações , temos :

a) $3x - 4 > 8$
$3x > 8 + 4$
$3x > 12$

$x > 4$

$V_1 = \{ x \in R \;/\; x > 4 \}$

A razão de duas grandezas é o quociente dos números que medem essas grandezas numa mesma unidade.

Os termos de uma razão são denominados antecedente e conseqüente. Assim, em 3:4 ou $\frac{3}{2}$ temor :

antecedente : 3
conseqüente : 4

Razões equivalentes

Vimos que 1,35 e $\frac{15}{20}$ são razões que valem $\frac{3}{4}$ ou 0,75 . Dizemos que são razões equivalentes a $\frac{3}{4}$ ou "3 para 4".

Podem-se sempre obter razões equivalente a uma razão dada, por exemplo. A $\frac{3}{4}$. Basta multiplicar o antecedente e o conseqüente por um mesmo número não – nulo e indicar :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} \ldots$$

4. Proporções

As razões $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$ formam igualdades, ou:

cada, uma dessa igualdades chama-se **proporção**.

Denomina-se proporção a uma igualdade entre duas razões.

A proporção $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ também é escrita sob a forma 1 : 2 : : 2 : 4 ou " um está para dois, assim como dois está para quatro” . Essa forma de escrever deu nome próprios aos termos:

$$\underbrace{1 : \underbrace{2 : : 2}_{\text{meios}} : 4}_{\text{extremos}}$$

ou

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{meios} \\ \longrightarrow \text{extremos} \end{array}$$

Termo desconhecido de uma proporção

Vamos considera a proporção $\frac{5}{x} = \frac{15}{36}$. observe que nessa proporção um de seus termos é desconhecido. Podemos calcular o valor x aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$$\frac{5}{x} \times \frac{15}{36}.$$

$$15 . x = 5 . 36$$
$$\frac{15x}{15} = \frac{5 . 36}{15}$$

$$x = 12$$

Vamos, agora, obter o valor desconhecido y na proporção:

$$\frac{3y + 2}{30} = \frac{5y - 22}{12}$$

$$30 . (5y – 22) = 12 . (3y + 2)$$
$$150y – 660 = 36y + 24$$
$$150y – 36y = 660 + 24$$
$$114y = 684$$
$$y = 6$$

verificação:

$$\frac{3y + 2}{30} = \frac{5y - 22}{12}$$
$$\frac{3.6 + 2}{30} = \frac{5 .6 – 22}{12} \text{ ou } \frac{20}{30} = \frac{8}{12} .$$

onde 20 . 12 = 30 . 8 o que confirma a proporção.

Exercício

Calcule o valor desconhecido em cada proporção:

a) $\frac{3}{x} = \frac{2}{4}$.

b) $\frac{x}{7} = \frac{3}{21}$.

c) $\frac{3}{x} = \frac{12}{8}$.

d) $\frac{21}{8} = \frac{7}{x}$.

e) $\frac{8}{x} = \frac{24}{36}$.

f) $\frac{x + 7}{2} = \frac{5}{1}$.

g) $\frac{x}{3 - x} = \frac{5}{4}$.

h) $\frac{8x}{5} = \frac{x + 1}{2}$

Regra de três simples

Vamos considera a seguinte situação :
“ Bianca comprou 3 camisetas e pagou \$ 1200,00. Quanto pagaria se comprasse 5 camisetas do mesmo tipo e preço ?” Observe que estão relacionados dois valores da grandeza camisetas com dois valores da grandeza preço. Vamos organizar esses dados numa tabela:

Camisetas	preços (\$)
3	1 200
5	x

Note que nessa tabela conhecemos três de seus elementos e procuramos o valor do quarto. Problemas desse tipo são chamados de problemas de regra de três simples. Veja que as grandezas camisetas e preço são diretamente proporcionais; assim, podemos escrever o proporção:

$$\frac{3}{5} = \frac{1\ 200}{x}$$

Aplicando a propriedade fundamental , temos:

$$3x = 1\ 200 . 5$$

$$x = \frac{1\ 200 . 5}{3}$$

$$x = 2\ 000$$

logo, Binca pagaria \$ 2 000,00 pela cinco camisetas. Podemos estabelecer um processo prático que facilite a resolução de problemas desse tipo. Acompanhe essas etapas nos problemas resolvidos a seguir.

Com velocidade média de 500 km por hora, uma avião percorre uma distância entre duas cidades em 3 horas. Que tempo levaria uma aeronave que desenvolve 800 Km por hora de velocidade média para percorrer o mesmo espaço?

- Organizam –se os dados:

Velocidade(Km/h)	tempo (h)
500	3
800	x

- As grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais. Assim, as flechas terão sentidos discordantes:

Velocidade (Km/h)	tempo(h)
↓ 500	3 ↑
800	x

- Escreve-se a proporção ,invertendo-se os termos de umas das razões ; calcula-se o valor da incógnita.

$$\frac{500}{800} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 500}{800}$$

$$x = 15 \Rightarrow x = \text{1h 52 mim 30 Seg}$$

logo, a aeronave levaria 1h52 mim 30 Seg para percorrer o mesmo espaço.

Exercício

1. Em cada problema seguinte , arme o esquema, a proporção resultante e calcule o valor desconhecido:

a) Se 15 operários levam 10 dias para completar um certo trabalho, quantos operários farão esse mesmo trabalho em 6 dias?
b) Com 10 Kg de trigo podemos fabricar 65 Kg de farinha. Quantos quilogramas de trigo são necessários para fabricar 162,5 Kg de farinha ?
c) Roseli comprou 2m de tecido para fazer um vestido. Quantos metros de tecido seriam necessários para que Roseli pudesse fazer 7 vestidos iguais ?
d) Num acampamento, há 48 pessoas e alimento suficiente para um mês . Retirando –se 16 pessoas, para quantos dias dará a quantidade de alimento ?
e) Cinco pedreiros constroem uma casa em 300 dias. Quantos dias serão necessários para que 10 pedreiros construam essa mesma casa?
f) Reinaldo trabalhou 30 dias e recebeu $ 15 000,00 . Quantos dias terá que trabalhar para receber $ 20 000,00 ?
g) Um carro com velocidade constante de 100Km/h , vai da cidade A até a cidade B em 3 horas. Quanto tempo levaria esse mesmo carro par ir de A até B, se sua velocidade constante fosse 160Km/h ?
h) Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas torneiras seriam necessárias para encher a mesma piscina em 2 horas?

Taxa de porcentagem

Considere o seguinte anúncio de jornal: “ Vendem-se tênis: desconto de 50%”.
Observe que neste anúncio aparece a expressão 50%, que se lê cinqüenta por cento, e pode ser indicada por 50 em 100 ou $\frac{50}{100}$. A expressão “50% de desconto” pode ser entendida como um desconto de $ 50,00 em cada $ 100,00 do preço de uma mercadoria.

Expressão	Leitura	Significado
“18% não votaram”	18 por cento não votaram	Em cada 100 eleitores 18 não votarma.
“ 40% não vieram”	40 por cento não vieram	Em cada 100 pessoas 40 não vieram

As expressões 18% e 40% podem ser indicadas na forma de fração, por 18 e 40 , respectivamente. Como essa frações possuem denominadores iguais a 100, são denominadas **frações centesimais**.

Os numerais 40% e 18% são **taxas centesimais** ou **taxas de porcentagens**, pois expressam a razão que existe uma grandeza e 100 elementos do universo dessa grandeza .

Escreva as frações seguintes na forma de taxa de centesimal:

a) $\frac{15}{100}$.
b) $\frac{37}{100}$.
c) $\frac{70}{100}$.
d) $\frac{81}{100}$.
e) $\frac{3}{100}$.
f) $\frac{4}{25}$.

Escreva cada taxa de porcentagem na forma de fração centesimal :

a) 18%
b) 52%
c) 4%
d) 35%
e) 10%
f) 100%

Cálculo da taxa de porcentagem

O cálculo da taxa de porcentagem pode ser realizado utilizando-se uma **regra de três simples**.
Vejamos algumas situações onde esse cálculo é utilizado.

1º situação
Depositando –se $ 60,00 numa caderneta de poupança , ao final de um mês obtêm-se $ 75,00. Vamos calcular a taxa de porcentagem desse rendimento :

- $ 60,00 é a quantia principal do problema ;
- $ 15,00 é o rendimento obtido no período.

Organizamos uma regra de três simples, onde:
$ 60,00 correspondem a 100% investidos;
$ 15,00 correspondem a x% do que foi investido.
Essa regra de três simples é direta:

$$\begin{array}{c l l c} \big\downarrow & \$\ 60,00 & 100 & \big\downarrow \\ & \$\ 15,00 & x & \end{array}$$

$$\frac{60}{15} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100\ .\ 15}{60}$$

$$x = 25$$

portanto, a taxa de rendimento foi de 25% .

Exercícios

1. Calcule:
a) 20% de 1 000 pessoas,
b) 70% de 80 cavalos.
c) 9% de 10 000 doentes com dengue.
d) 40% de 90 pregos.
e) 7,5% de 200 ovos.
f) 0,45% de 2 000 laranjas.

2. Resolva os seguistes problemas:
a) A quantia de $ 945,00 é igual a quantos por cento de $ 4 500,00?
b) E uma classe de 50 alunos, compareceram 35. Qual a taxa percentual de ausência ?
c) Num exame de 110 questões, um aluno errou 10% . Quantas questões ele acertou?
d) Obtive 14% de desconto numa compra de $ 24 000,00 . Quanto paguei ?
e) O preço marcado de um produto era $ 2 500,00 . Paguei apenas $ 2 000,00, pois obtive um abatimento. Qual foi a taxa de porcentagem do desconto ?
f) Economizei $ 840,00 ao obter um desconto de 12% na compra de uma roupa. Qual era o preço marcado inicialmente nessa roupa?
g) Gastei 20% de meu salário em uma mercadoria que me custou $ 5 000,00. Qual o valor do meu salário ?

Juros simples

Considere a seguinte situação :

“ A importância de $ 100 000,00 foi emprestado por um Banco ao cliente Epaminondas da Silva. O Banco cobrará do cliente 10% e juros mensal. Quanto será cobrado?

Vamos denominar e convencionar uma representação para cada deado do problema:

- O dinheiro emprestado, $ 100 000,00, chama-se **quantia principal**. Representa-se por **C**
- A retribuição periódica pela cessão do dinheiro, eu corresponde à quantia que será cobrada pelo Banco, é o aluguel que se paga em cada período. Recebe o nome de juro e representa-se por **j**
- A **taxa de juro** , 10% é a taxa que funciona como o aluguel que o cliente pata por 100 unidades de dinheiro que o Banco lhe empresta; representa-se por **i**.
- A referência de tempo. Um mês em que o dinheiro ficou aplicado, representa-se por **t**.

Problemas desse tipo podem ser resolvidos utilizando-se uma regra de três. Vamos estabelecer um problema genérico e obter uma formula que permite obter a solução de problemas semelhantes.

“Quem aplica $ 100,00 à taxa de 1% ao período (ano, ou mês, ou dia etc.) recebe no fim do período $ 1,00 de juros. Se aplicasse um capital **C** à taxa **i** ao período, então receberia o juros **j**”.

Monta-se uma regra de três composta:

Capital	taxa	tempo	juro
↓ 100	↓ 1	↓ 1	↓ 1
C	i	t	j

Como são grandezas diretamente proporcionais em relação à grandeza juro, podemos escrever:

$$\frac{100}{C} . \frac{1}{i} . \frac{1}{t} = \frac{1}{j} .$$

$$J = \frac{C\ i\ t}{100}$$

Vamos calcular o juros pago por uma pessoa que tomou emprestada quantia de $ 50 000,00,durante 8 meses, a uma taxa de 1,2% ao mês:

Dados

C = $ 50 000,00

I = 1,2% ao mês

t = 8 meses

j = ?

$$j = \frac{C\ i\ t}{100}$$

$$j = \frac{50\ 000\ .\ 1,2\ .\ 8}{100}$$

$$j = 4\ 800$$

foram pagos $ 4 800,00 de juro.

Vamos, agora , determinar a quantia que deve ser aplicada por uma pessoa a uma taxa de 6% ao ano, para que após 2 anos receba $ 18 000,00 de juro.

Dados

C = ?
I = 6% ao ano
t = 2 anos
j = $ 18 000,00

$$j = \frac{C\ i\ t}{100}$$

$$18\ 000 = \frac{C\ .\ 6\ .\ 2}{100}$$

$$12\ .\ C = 1\ 800\ 000$$

$$C = \frac{18\ 000\ 000}{12}$$

$$C = 150\ 000$$

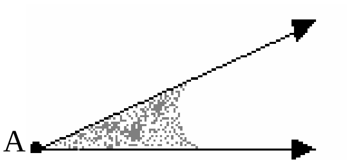
A quantia que deve ser aplicada é de $ 150 000,00.

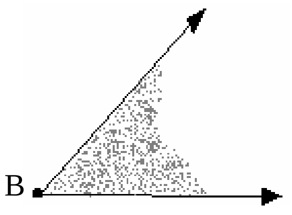
Exercício

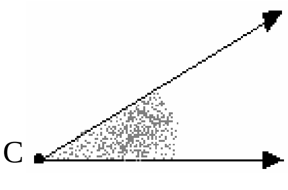
1. Resolva os seguintes problemas :
a) Qual o juro sobre $ 25 000,00 à taxa de 1% ao mês, em 16 meses?
b) A que taxa foi depositado o capital de $ 15 000,00 que em 4 anos produziu $ 6 000,00 de juros?
c) Qual o capital que, aplicado a 3% ao mês , produz $ 6 000,00 de juro em 10 meses?
d) Uma pessoa toma emprestado de um Banco $ 54 000,00 e após 6 meses e 15 dias devolve $ 60 000,00 . A que taxa foi tomado o empréstimo ?
e) Uma pessoa empregou $ 50 000,00 . Sabendo-se que após 10 meses ela irá receber $ 100 000,00 calcule a que taxa de juro foi empregado este dinheiro.
f) Qual o capital que aplicado a 8% ao mês, num período de 6 meses , produz $ 24 000,00 de juro?
g) A que taxa foi empregado o capital de # 25 000,00 ,sabendo
h) Uma pessoa toma emprestado $ 10 000,00 durante 5 meses. Qual a taxa de juro que essa pessoa pagou, sabendo-se que ela devolveu $ 15 000,00?

Ângulos congruentes

Vamos considerar os ângulos. Â, B e C a seguir , e determinar as suas medidas utilizando um transferidor :







A partir dessas medidas, podemos concluir que:

med (A) = med (C)
med (A) ≠ med (B)
med (B) ≠ med (C)

Diremos, então:

Ângulos congruente são aqueles que têm a mesma medida.

Equações do 2º Grau

Equações do 2º Grau

Há cerca de 4000 anos os babilônios já resolviam problemas envolvendo cálculos que hoje conhecemos como equação do 2º grau.

Estes problemas eram escritos em forma de textos e a sua resolução era através de tentativas.

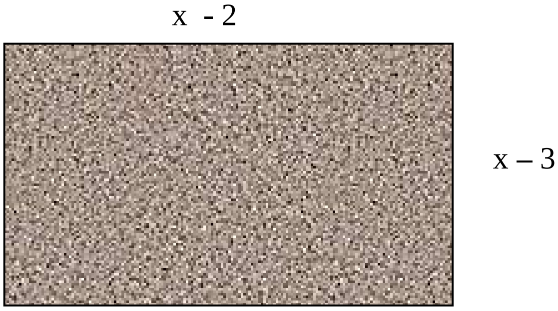
Ao longo dos séculos foram aparecendo vários métodos para sua resolução.

Hoje, as contribuições deixadas pelos matemáticos nos facilitou tanto na escrita como nas técnicas de resolução de problemas do 2º grau.

Observe as seguintes situações:

Situação - 1

A dimensões de um terreno estão representadas na figura abaixo. A área desse terrno é 30 m^2 . Quanto ele mede de comprimento e largura ?



Vamos encaminhar o nosso raciocínio da seguinte maneira :

Sendo o terreno de forma retangular , podemos expressar sua área como : o produto do comprimento pela largura.

Assim $A = (x – 2) (x – 3)$

Voltando à equação $x^2 – 5x – 24 = 0$

- O coeficiente **a** é representado por 1
- O coeficiente **b** é representado por –5
- O coeficiente **c** é representado por –24

Para se encontrar a medida do comprimento e da largura do terreno da **situação 1** é necessário resolver essa equação do 2º grau

Resolução da equação do 2º grau.

Resolver uma equação do 2º grau significa determinar as suas **raízes .**

Raiz de uma equação é o número real que ao substituir a variável de uma equação transforma-a, numa sentença verdadeira.

Podemos resolver a equação do 2º grau através da fórmula de **Báskara:**

$$X = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ (nº real) é comumente representada pela letra grega Δ (delta) e chamada de **discriminante** da equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x = \frac{- b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Vamos resolver a equação do problema da situação – 1

$x^2 - 5x - 24 = 0$ $\quad a = 1$
$b = - 5$
$c = - 24$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (5)^2 - 4 . 1 .(-24)$
$\Delta = 25 + 96$
$\Delta = 121$

$$X = \frac{- b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = \frac{- (-5) + \sqrt{121}}{2.1} \Rightarrow x' = \frac{5 + 11}{2} \Rightarrow x' = \frac{16}{2} \Rightarrow x' = 8$$

$$x'' = \frac{- (- 5) - \sqrt{121}}{2.1} \Rightarrow x'' = \frac{5 - 11}{2} \Rightarrow x'' = \frac{- 6}{2} \Rightarrow x'' = -3$$

As raízes dessa equação são:
$x' = 8$ e $x'' = - 3$

As dimensões do terreno da **situação 1** são :

➢ Comprimento	x - 2
➢ Largura	x – 3

Substituindo x por 8 temos:

- Comprimento $8 - 2 = 6$
- Largura $8 - 3 = 5$

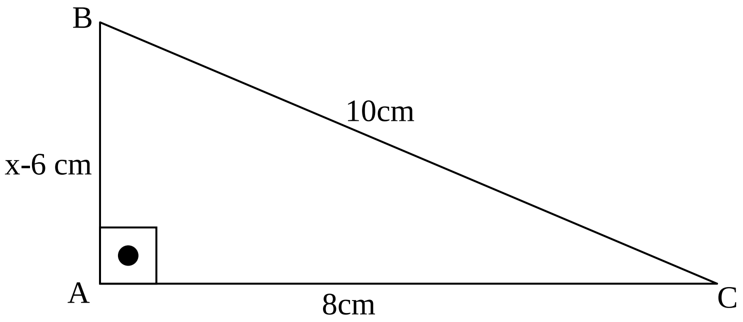
Substituindo x por -3 temos:

- Comprimento $- 3 - 2 = -5$
- Largura $- 3 - 3 = -6$

Como não há comprimento e largura menores que zero, concluímos que as dimensões do terreno são 5m por 6 m.

Situação – 2

Quanto mede o cateto menor do triângulo retângulo abaixo?



No triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos.

Assim :

$10^2 = 8^2 + (x - 6)^2$

Efetuando os cálculos algébricos temos :

$100 = 64 + x^2 - 12x + 36$

$x^2 - 12x = 100 - 64 - 36$

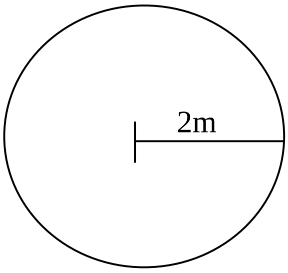
$x^2 - 12x = 0$

Comparando essa equação a forma da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, o que você observar?

Se você respondeu que falta o termo **c** está correto.

Comprimento da Circunferência

Se você fosse colocar renda em volta de uma toalha de mesa. Redonda, com as medidas representadas no desenho abaixo. Quantos metros de renda seriam necessários ?



Suponha que o círculo abaixo tem um barbante ajustado em sua volta. Se cortarmos o barbante no ponto marcado e esticá-lo, como mostra a figura, termos o comprimento do contorno do ao círculo ou **comprimento da circunferência.**

Após a realização de várias experiências, ficou provado que ,em qualquer circunferência, a divisão do comprimento da circunferência pela mediada do diâmetro, sempre dá o mesmo resultado.

$$\frac{\textbf{Cumprimento da circunferência}}{\textbf{diâmetro}} = \textbf{3,14159265 . . .}$$

Esse quociente de representação decimal infinita e não periódica: 3,14159262... Chama-se **pi**, cujo símbolo é π

Para achar o comprimento da circunferência, basta multiplicar o diâmetro pelo π ou seja, $C = d . \pi$ (C = comprimento da circunferência, d = diâmetro) .

Como o diâmetro é o dobro do raio, podemos também representar o comprimento da circunferência em função do raio .

Assim :

$\boxed{C = 2r\pi}$ ou $\boxed{C = 2\pi r}$

Agora, podemos calcular a metragem de renda da toalha da situação anterior, multiplicando o diâmetro por π

Assim:

$$C = 4 \times 3{,}14$$
$$C = 12{,}56m$$

Portanto, gastaria 12,56m de renda nessa toalha.

Atividade

1º) Complete com a unidade de medida correta:
a) Quando vamos confeccionar uma roupa (vestido , calça, blusa) usamos o ....
b) A largura de um palmo é o ....
c) A medida de seu palmo é o ....

2º) Lembre-se que a unidade de medida de comprimento mais usada depois do metro é o centímetro (cm) e responde:
a) Quantos centímetro (cm) tem aproximadamente seu palmo?
b) Quantos palmos tem sua carteira ?
c) Quantos centímetros tem sua carteira ?
d) Qual a largura e o comprimento de seu caderno ? Em palmos e em centímetros (cm)?
e) Qual a largura da sala de sua casa ? Utilize seu pé, calçado.
f) Quantos centímetros tem o seu pé?

3º) Júlia tem , 1,65m de altura. Qual é a sua altura em cm?

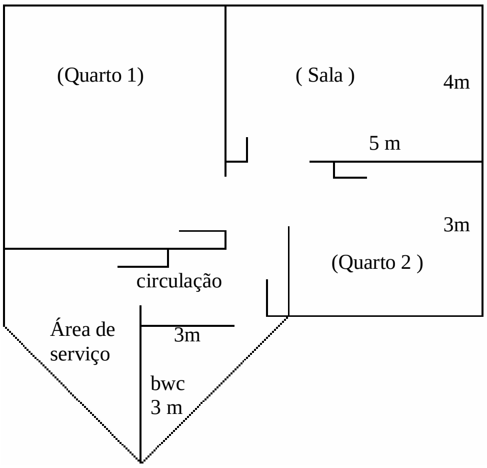
4º) Para medir o comprimento do corredor de sua escola, Robson anotou 16 passos, Se casa passo mede 65 cm, qual é o comprimento do corredor em metros?

5º) Numa bicicleta em que o raio da roda é de 26 cm, qual será . aproximadamente, o comprimento da circunferência da roda?

6º) O contorno de uma pista de corrida de forma circular, mede 628 m , Qual a medida do diâmetro dessa pista:

Medida de Superfície

Observe a planta :



Essa é a planta baixa da casa do Sr. Antônio; ele quer fazer o piso de cerâmica no quarto 2. Na sala. no banheiro e na área de serviço. Para isso necessita saber quantos metros quadrados de cerâmica serão necessários para cada uma dessas dependências da casa.

Situação 1

Iniciamos pelo quarto 2. Que tem a forma de um quadrado de 3m de lado.
Vamos tomar como medida de área um quadrado de lado igual a 1m .

Para você ter noção quantidade de espaço ocupada por $1m^2$, construa em jornal. Cartolina ou qualquer tipo de papel, um quadrado de 1 metro por 1 metro . Esse quadrado pode ser representado na escala 1: 100 .

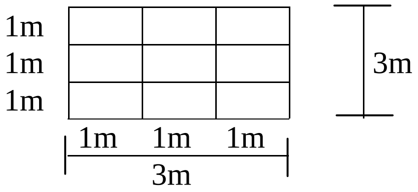
O metro quadrado é a área de uma superfície delimitada por um quadrado de 1m de lado.

Vamos verificar quantas vezes esta unidade de área cabe no desenho do quarto 2, com 3m de lado.

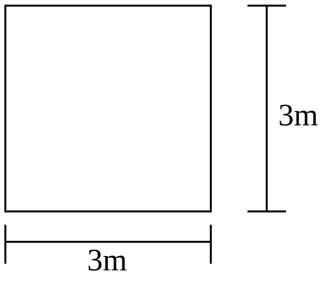
Para isto, vamos dividí - lo na horizontal e na vertical com linhas diferentes uma da outra 1 m (metro)

Assim obtemos 9 quadradinhos indicadores : esse quarto possui 9 unidades de área, ou seja, 9 metros quadrados (9 m^2).

Verifique:



Uma outra maneira de realizar esse cálculo, é simplesmente encontrar o produto dos lados.



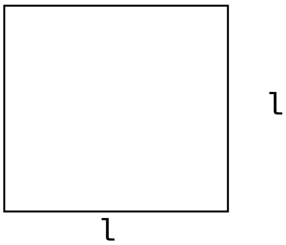
$A = 3m \times 3m = 9\ m^2$

Observe que a operação 3 x 3 é uma multiplicação de fatores iguais . Esse tipo de operação chamamos de **potenciação** e pode ser representada por 3^2 (lê-se três elevado ao quadrado)

Então :
$3^2 = 3 \times 3 = 9$
Vimos que o quarto 2 possui forma quadrada e sua área é $9m^2$.
Vamos supor que não saibamos a medida dos lados desse quarto, como calcular essas medidas?

Vamos representa por `l` essa medida.

Assim :

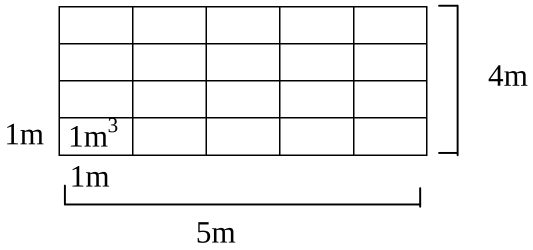


Sabemos que `l` x `l` = 9 e pode ser representado por l2 = 9.
Portanto `l` é um número que elevado ao quadrado dá 9. Como 32 = 9 . l é 3 .

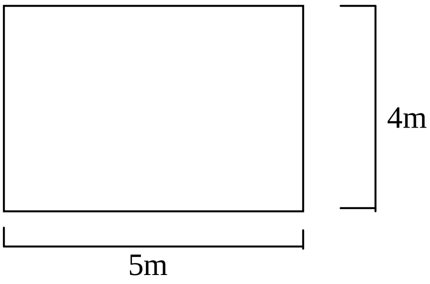
Esta operação chamamos de **radiciação**.
Indicamos por $^{2}\sqrt{9} = 3$ (lê-se raiz quadrada de 9 é igual 3).
Radiciação é a operação inversa da potenciação .

Situação 2

Agora vamos calcular a área do piso da sala, que tem a forma de um retângulo, do mesmo modo que calcularmos a área do quarto 2.



Veja que a área de um retângulo é a multiplicação do comprimento pela largura.



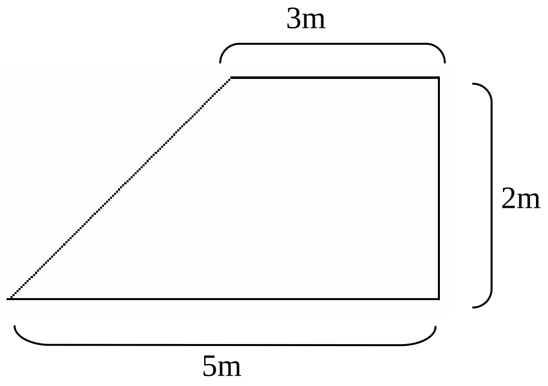
A = 5m x 4m
A = 20 m^2

Então, o Sr. Antônio necessitará de 20 m^2 de piso para a sala.

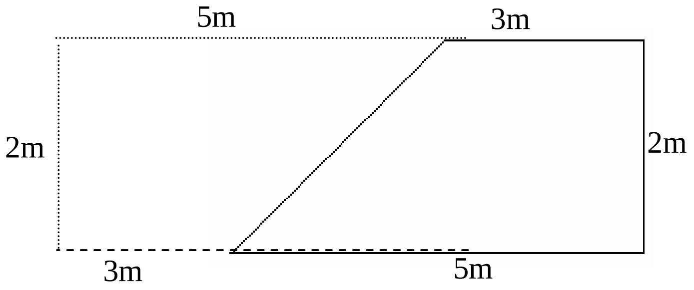
Em Matemática, quando resolvemos um problema de cálculo de área onde a superfície pode ser representada por um retângulo, dizemos que a área é igual ao produto da base pela altura.
Assim: $\boxed{A = b \text{ x } h}$

Situação 3

Para revestir o piso da área de serviço. O Sr. Antônio ficou preocupado. Pois a forma é de um trapézio. Cujas medidas estão representadas na figura abaixo. De que modo ele calcularia ?



Vamos calcular da seguinte maneira



Colocando um outro trapézio em posição oposta com as mesmas medidas. Obtermos um retângulo cujo lado maior será de 3m + 5 m e outro de 2m.

Como você já sabe que a área do retângulo é comprimento multiplicado pela largura , ficou feliz!
Mas, aí o nosso proprietário compraria o dobro do piso necessário.
Então , concluímos que basta dividir essa metragem por dois.

Chamaremos a parede de 5 m de **B**. a de 3m de **b** e a altura de **h** com 2m . Assim, a área do trapézio será dada pela expressão:

$$A = \frac{(B + b) \text{ x } h}{2}$$

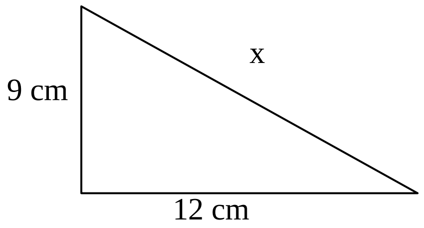
$$A = \frac{(5 + 3) \text{ x } 2}{2}$$

$$A = \frac{8 \text{ x } 2}{2} \qquad A = 8 \text{ m}^2$$

Então , o Sr. Antônio necessitará de 8 m^2 de piso para a área de serviço.

Situação 1

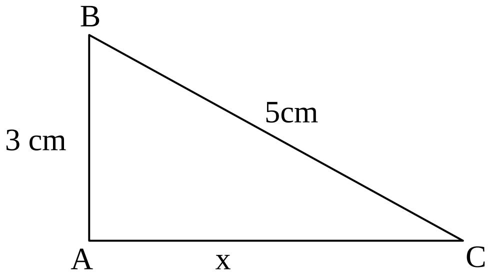
No triângulo retângulo abaixo. São dadas as medidas dos catetos. Encontre a medida x que corresponde a hipotenusa.



Fazer os cálculos, você deve ter chegado à relação $x^2 = 225$ (essa é uma equação do 2º grau). Como fazer para achar “ x”?
Lembre-se de que a operação inversa da potenciação é a radiciação. Se $x^2 = 225$,
então :
$x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15$.

Logo , a medida da hipotenusa é 15 cm.

Situação 2
Observe o triângulo retângulo abaixo:



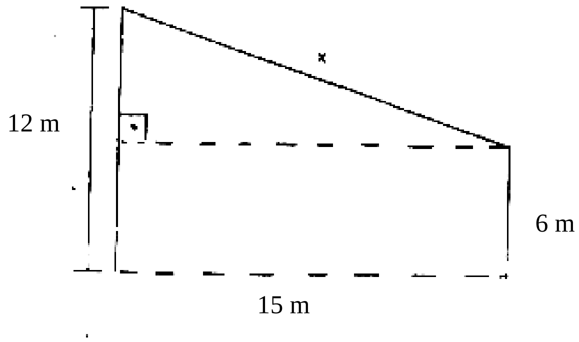
Qual é a medida do cateto maior ?

$5^2 = 3^2 + x^2$
$25 = 9 + x^2$ (chegamos outra vez em uma equação do 2º grau)
$x^2 = 16$
$x = \sqrt{16}$
$x = 4$

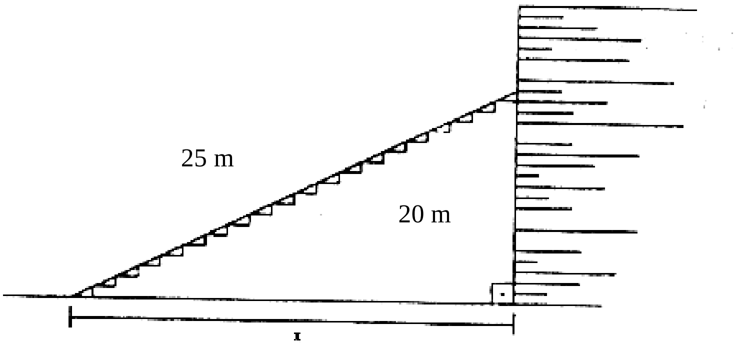
Logo, a medida do cateto maior é 4 cm.

Atividade 2
1º) os cateto de um triângulo retângulo medem 5 cm e 12 cm. Qual é a medida da hipotenusa?

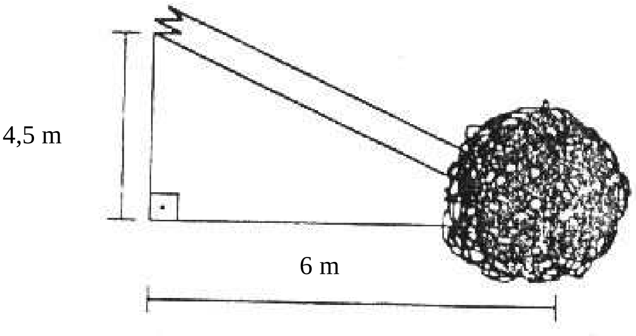
2º) A figura abaixo mostra que a distância entre dois postes é 15m. As alturas deste postes são respectivamente 6m e 12 m . Qual deverá ser o comprimento do cabo que une as extremidades superiores destes postes ?



3º) Uma escada está apoiada numa parede a 20m do chão , como mostra a figura. Sabendo que a escada tem 25 m de comprimento, qual é a distância do início da escada até a parede ao nível do chão (x)?



4º) Devido a um temporal, um pé de eucalipto é quebrado de modo tal que sua parte mais alta toca o solo. Sabe-se que a distância entre o tronco do eucalipto e a parte que tocou o solo é de 6m e a parte que ficou fixa no solo tem 4,5 m . Qual era a altura desse eucalipto antes de ter-se quebrado ?



Esse conhecimento vem de muitos milênios atrás, quando no antigo Egito costumava-se medir as Terras a beira do rio Nilo , onde havia as plantações e , a cada enchente , as mercas deixadas pelos agrimensores eram carregadas pelas águas, necessitando, portanto, de novas remarcações.

Os Hindus, também na mesma época, construíam o ângulo reto de modo semelhantes, porém utilizavam outras mediadas.

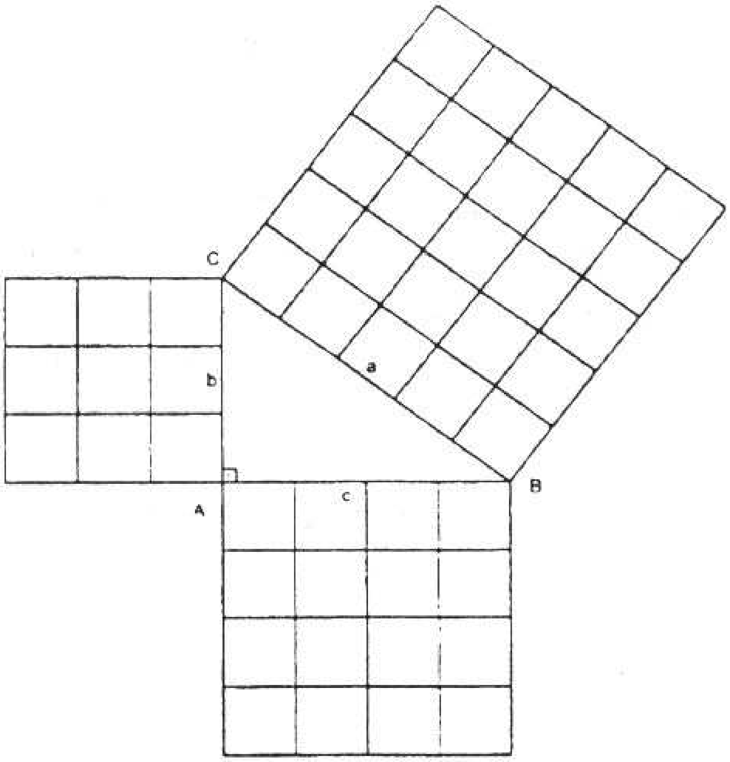
Se você fizer um triângulo de 6 cm . 8 cm e 10 cm, u dos ângulos será reto (90º)? Justifique a sua resposta .

Confira com seu professor.

O matemático e filósofo grego Pitágoras, fundou a Sociedade chamada Ordem dos Pitagóricos, onde com seus discípulos descobriu a relação existente entre as medidas dos lados de qualquer triângulo retângulo.

Se um triângulo tem os lados medindo : 3 : 4 e 5 é um **triângulo retângulo.**

Observe:



Considere o triângulo retângulo ABC acima. Os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos (b e c)** e o lado oposto ao ângulo reto é denominado **hipotenusa (a)**.

A medida da hipotenusa mantém uma relação com as medidas dos catetos. Essa relação mostra uma das propriedades mais importantes da Matemática.

"A área de um quadrado traçado sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados traçados a partir dos catetos, ou seja. 25 ua = 9 ua . 16 ua (ua) ⇒ unidades de área".

Essa propriedade é conhecida como **Teorema de Pitágoras**, e, para facilitar os cálculos pode ser designada:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados dos lados menores.

Por exemplo:

O triângulo utilizado pelos pedreiros de lados 3, 4 , 5 :

$a^2 = b^2 + c^2$
$5^2 = 3^2 + 4^2$
$25 = 9 + 16$
$25 = 25$

Observe que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

Dissemos que, se as medidas dos lados de um triângulo, em uma dada unidade, são: 3;4 e 5 ou 6; 8 e 10 ou 9;12 e 15 ou 12;16 e 20 ou . . . , ele é um triângulo retângulo. Verifique se em todos eles é verdade que : O quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos lados menores.

Se você pegou as medida: 6;8 e 10, o lado maior é a hipotenusa (10) e os lados menores (6 e 8) são os catetos.

Se vocês fez:

102 = 62 82
100 = 36 + 64
100 = 100 ⇒ a igualdade foi comprovada . Então , os valores 6,8,10 realmente são medidas de um triângulo retângulo.

Pegue agora outras medidas quaisquer e verifique se com elas é possível desenhar triângulos retângulos.

Consulte seu professor quando houver dúvidas.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

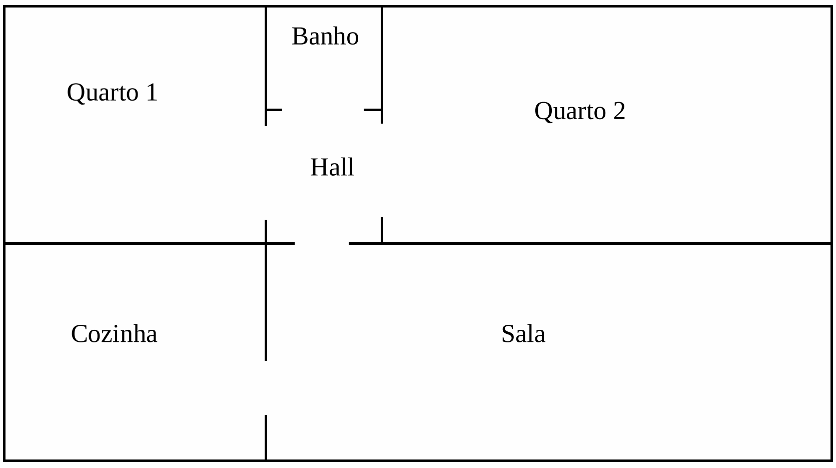
Teorema de Pitágoras

Como você deve saber, antes de fazer uma construção e necessário planejá-la . Esse planejamento é feito através de um modelo esboçado no papel. A esse modelo damos o nome de **planta baixa.**

Todos os cálculos da construção de uma casa, de um prédio, de um viaduto, dentre outras, são feitas tendo como base os dados contidos numa planta, que tem como referência as formas e dimensão da realidade.

Vamos verificar, num exemplo, como isso ocorre.

Observe a planta baixa que seu Nilo fez para construir a casa de seu filho:



A planta está na escala de 1:100. Mas o que significa 1:100?

Essa notação significa que a planta foi desenhada na escala 1 por 100, ou seja , para cada 1 cm desenhado no papal, corresponde a 100 cm ou 1m, na realidade .

Vamos estudar agora , umas questão referente as construções de maneira geral.

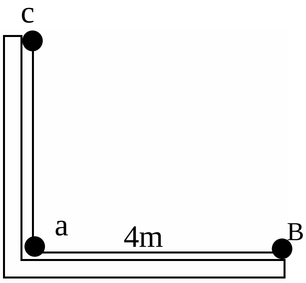
Voltando a observar a planta do quarto 2, cujas dimensões na realidade , são 4m de comprimento por 3m de largura.

O problema é saber se as paredes construídas “estão ou não no esquadro”, ou se os “cantos” formam um ângulo 90”

Cozinha

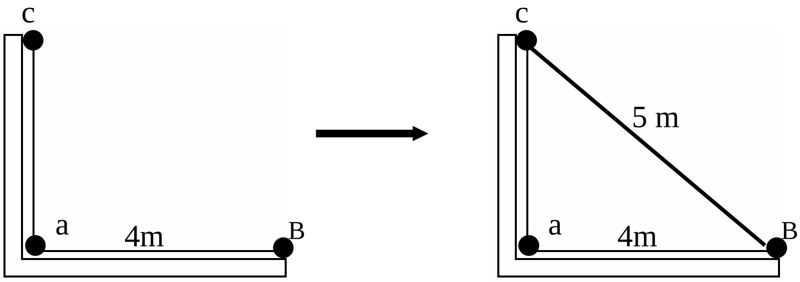
Esse problema é muito comum para os trabalhadores da construção civil, que têm uma maneira própria para resolvê-lo.

Vamos supor que o pedreiro de seu Nilo vai examinar se as paredes do quarto 2, da casa de seu filho, foram construídas no esquadro. Para isso, ele estica um fio entre duas estacas cravadas no chão, junto ao comprimento ou a largura das paredes do quarto; no caso, no comprimento. Observe, na figura abaixo, que o fio que liga as pontas A e B têm a mesma medida do comprimento da parede, 4m.



Usando sua experiência. O pedreiro deverá cravar a 3ª estaca num ponto “c’ de modo que “AC” fique perpendicular a “AB”. No caso, a distância entre as estacas situadas nos pontos A e C deverão ter uma distância equivalente a 3 m (largura do quarto) . A estaca “C” é provisória.

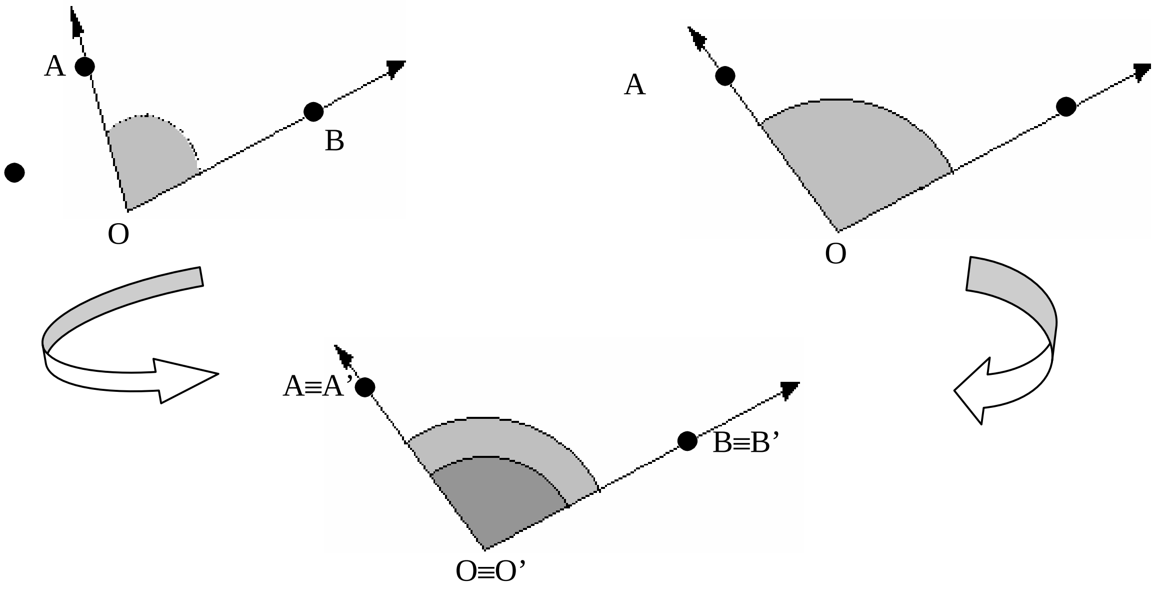
A seguir, mede a distância “BC”.



Se essa medida for equivalente a 5 m, ele garante que a parede está no esquadro, se não , movimentará a estaca “C” até dar 5m.

Você sabe porque o pedreiro forma, com as estacas , um triângulo retângulo de lados 3 m , 4 m , 5 m para saber se as paredes estão ou não no esquadro?

Se med (Â) = med (Â'), então indica-se Â = Â', que se lê: **ângulo A é congruente ao ângulo A'**
Também se pode entender de modo mais intuitivo que os **ângulos congruentes são aqueles que coincidem por superposição.**

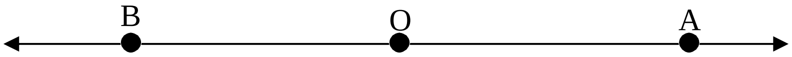


Superposição de AÔB e A'Ô'B'

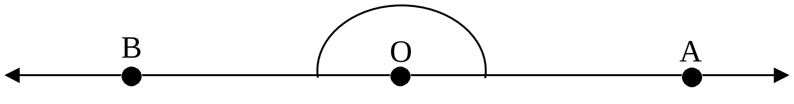
AÔB é congruente a A'Ô'B' porque coincidem ponto a ponto por superposição. Para superpor uma figura à outra, basta desenhar uma delas em papel vegetal ou de seda. A superposição mostrará a congruência ou a igualdade das medidas.

Ângulo raso e ângulo nulo

Vamos considerar a reta **r** e os pontos, O, A e B pertencentes a essa reta:



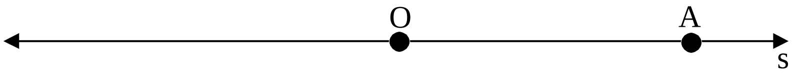
Observe que o ponto **O** divide a reta **r** em duas semi-retas opostas: AO e OB . Essas duas semi-retas opostas dividem o plano que as contém em duas regiões:



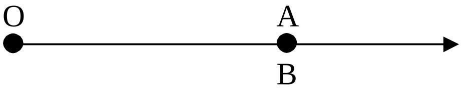
Convenciona-se que cada uma dessas regiões será denominada **ângulo raso**.
Assim, AÔB é um **ângulo raso**, onde:

- $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados;
- é o vértice
- AÔB mede 180º

Agora , vamos considera uma reta **s** e os pontos O, A e B pertencentes a **s**:



Observe que as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são coincidentes :

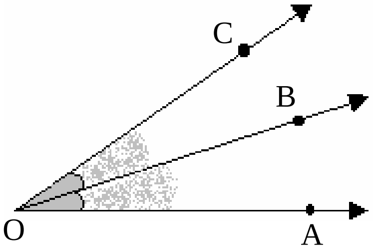


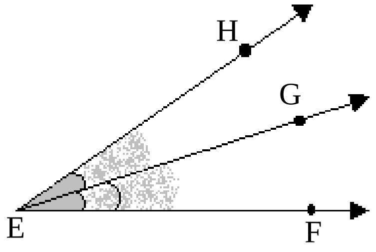
Convenciona-se que o ângulo AÔB é um ângulo nulo, onde:

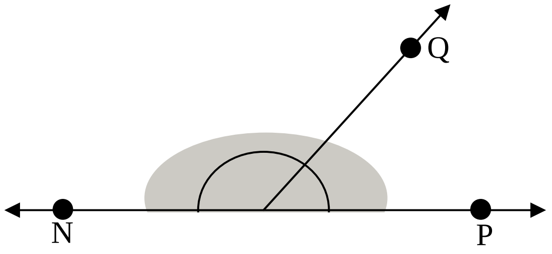
- $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados;
- O é o vértice;
- AÔB mede 0º .

Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes

Vamos considerar os pares de ângulos a seguir:







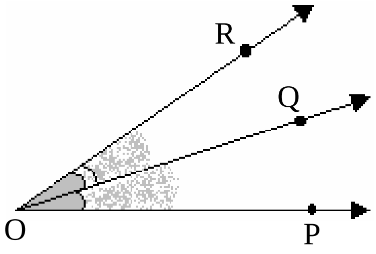
Observe que esses pares de ângulos têm entre si uma relação, pois em função da posição relativa que ocupam possuem certos elementos comuns:

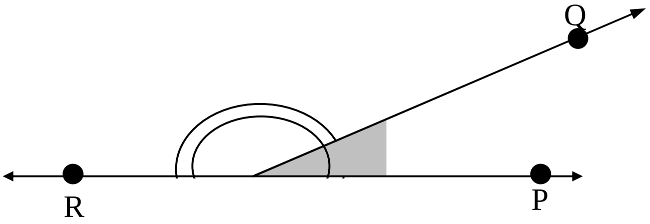
Pares de ângulos	Elementos comuns
AÔB e BÔC	• Vértice comum : O • Lado comum: OB
FÊH e FÊG	• Vértice comum: F • Lado comum: EF
PMQ e QMN	• Vértice comum: M • Lado comum : MQ

Esse pares de ângulos assinalados são chamados ângulos consecutivos, e todos têm o mesmo vértice e um lado comum.

Ângulos consecutivos são aqueles que têm o mesmo vértice e um lado comum.

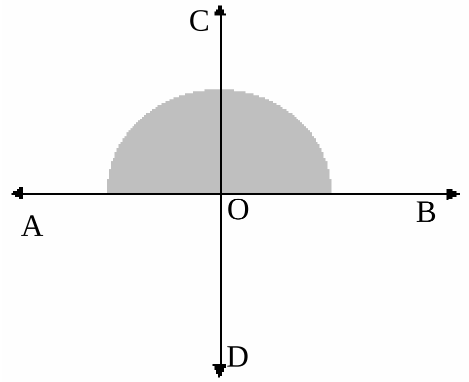
Observe os seguintes pares de ângulos consecutivos:

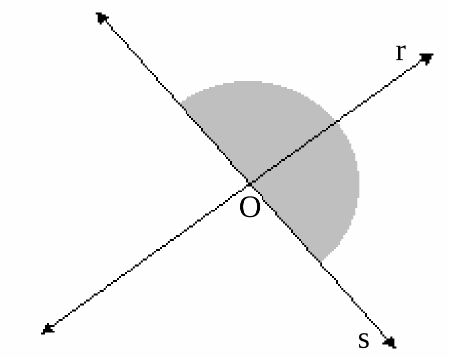




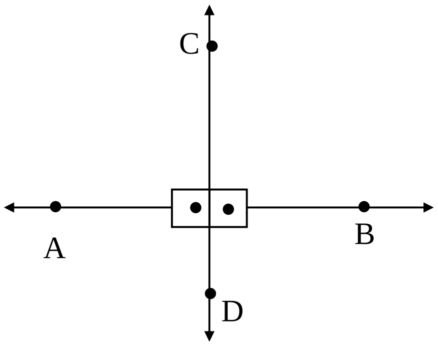
Retas perpendiculares e ângulos retos

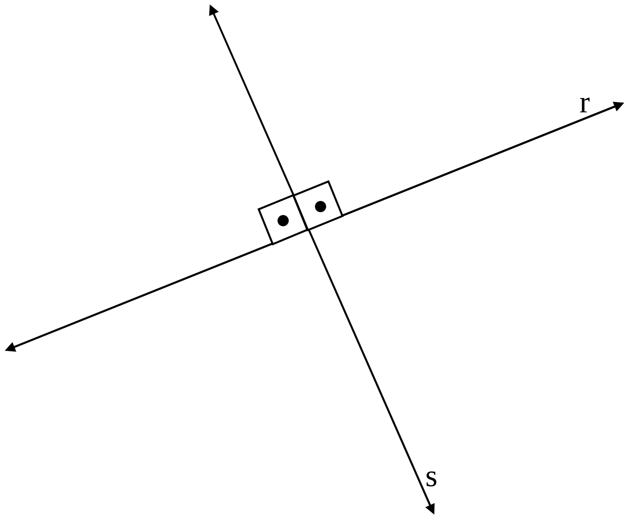
Vamos considerar as retas das figuras a seguir :





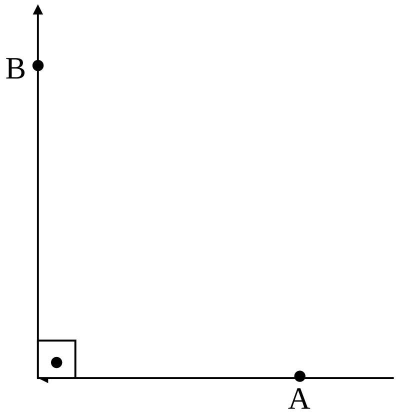
Observe que, nos dois casos , as retas se encontram formando quatro ângulos adjacentes congruentes , ou de medidas iguais . Quando isto ocorre, chamamos as retas de perpendiculares, indica-se $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, **r** ⊥ **s** e representa-se :

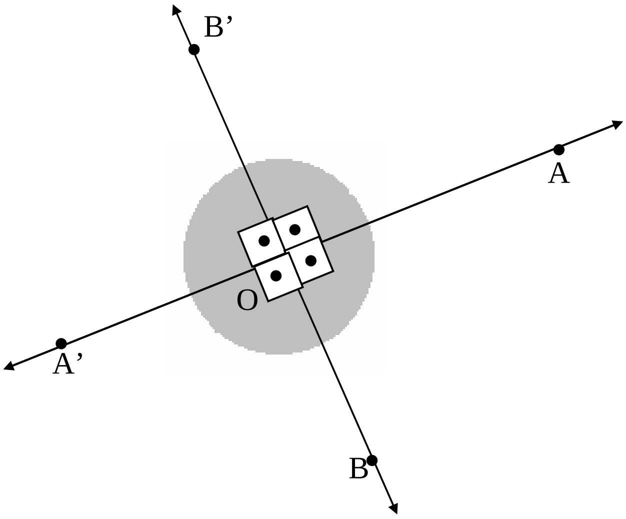




Cada um dos ângulos formados pelo encontro de duas retas perpendiculares recebe o nome de ângulo reto e mede 90º

Veja os ângulos formados pelas retas e pelas semi-retas perpendiculares a seguir:





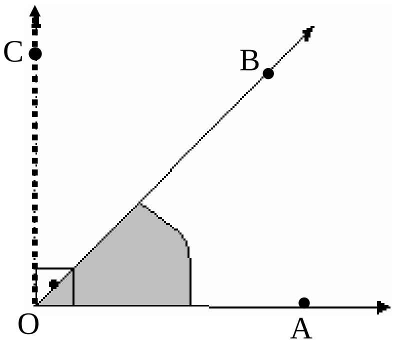
AÔB { lados : AO e OB
Vértice : O
Medida : med (AÔB) = 90º

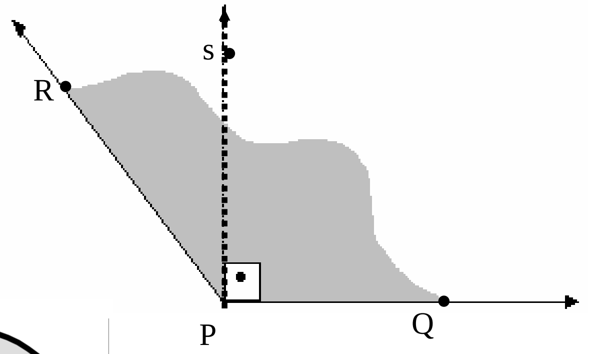
Assim
Chama-se ângulo reto aquele formado por retas perpendiculares.

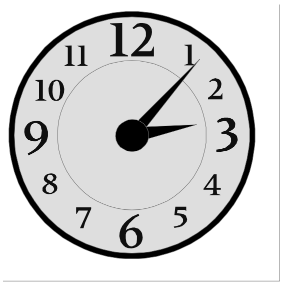
A'ÔB { lados : AO e OB
Vértice: O
Medida: med (A'ÔB') 90º

Ângulos agudos e ângulos obtusos

Vamos comparar um ângulo qualquer com o ângulo reto, e a partir dessa comparação estabelecer uma classificação para ângulos:







Note que o ângulo AÔB é menor que o **ângulo reto** e que o ângulo QPR é maior que o **ângulo reto**.

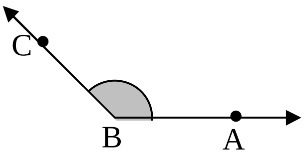
Chama-se agudo ao ângulo que for menor que o ângulo reto e obtuso ao que for maior que o ângulos reto.

Assim, podemos afirmar que a medida de um ângulo agudo está entre 0º e 90º e a medida de um ângulo obtuso, entre 90º e 180º.

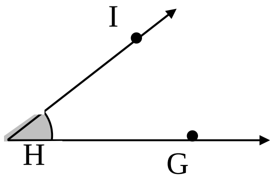
Exercícios

1º) Classifique em agudo, reto ou obtuso os ângulos das seguistes figuras:

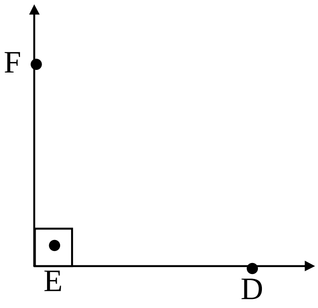
a)

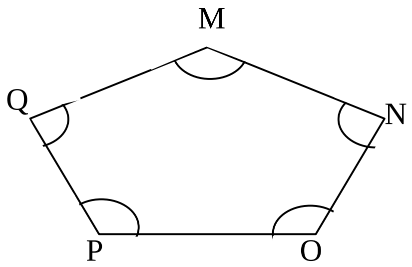


c)



b)



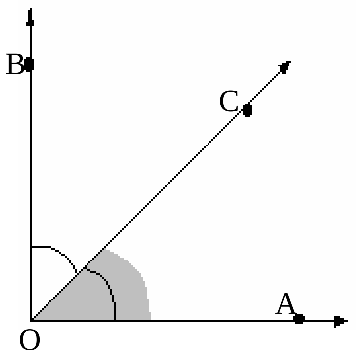


2) Sabendo –se que med (Â) = 30º, med (B) = 50º e med (C) = 60 º , verifique quais das afirmações seguintes são verdadeiras:

a) A + B = é um ângulo agudo;
b) A + B + C é um ângulo obtuso;
c) med(A) + med(C) é igual à medida de um ângulo raso;
d) med (A) + med (C) é igual à medida de um ângulo reto;
e) A + B – C é um ângulo obtuso

Ângulos complementares

Vamos considerar semi-retas perpendiculares $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e os ângulos AOC e COB da figura a seguir:



Note que AOB é um ângulo reto; logo a soma de AOC e COB é igual a 90º. Quando isto ocorre , dizemos que AOC e COB são ângulos complementares. Assim:

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas for igual a 90º

Dados dois ângulos cuja soma das medidas é 90º, chamamos cada um deles de complemento do outro . Assim, se x é a medida em graus de um ângulo, então 90º -x é a medida em graus do **complemento desse ângulo**.
Vamos calcular o complemento do ângulo que mede ∝ = 30º 20’15”.

- Complemento do ângulo: x = 90º - ∝

89º59’60”
30º20’15” -
59º39’45”

logo , o complemento de ∝ mede 59º39’45”.

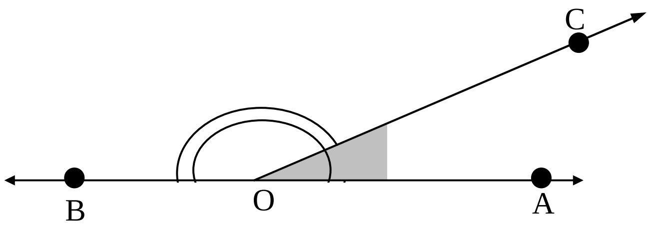
Exercícios

1º) Calcule o complemento de cada ângulo, cuja medida é dada a seguir:
a) 72º
b) 25º10’40”
c) 33º45’
d) 66º16’02”
e) 80º10”

2º)Escreva simbolicamente as seguintes frases (represente a medida de um ângulo por **x**):
a) O complemento de um ângulo.
b) Um terço da medida do complemento de um ângulo.
c) Dois terço de um ângulo mais a metade do seu complemento .
d) O ângulo mais sua metade mais um terço do seu complemento.
e) A soma entre um ângulo e o seu complemento.

Ângulos suplementares

Vamos considerar as semi-retas opostas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e os ângulos AOB e COB de figura a seguir:



Note que AÔB é um ângulo raso; logo, a soma de AÔC e CÔB é igual a 180º . Quando isto ocorre , dizemos que AÔC e CÔB são ângulos suplementares.

Assim:

Dois ângulos são **suplementares** quando a soma de suas medidas é igual a 180º

Dados dois ângulos cuja soma das medidas é 180º, chamamos cada um deles de suplemento do outro. Assim, se x e a medida em graus de um ângulo, então 180- x é a medida em graus do **suplemento desse ângulo**, então Vamos calcular o suplemento do ângulo que mede ∝ = 30º20’15”.

- Suplemento do ângulo : x = 180º - ∝

179º59’60”
30º20’15”
149º39’45”

logo , o suplemento de ∝ mede 149º39’45”.

Exercícios

1º)Calcule o suplemento de cada ângulo, cuja medida é dada a seguir:

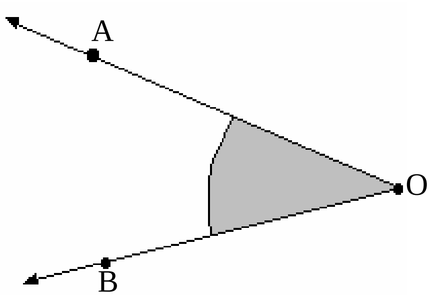
a) 45º
b) 9º38’50”
c) 90º
d) 112º40’
e) 142º40”
f) 115º27’10”

2º) Escreva simbolicamente as seguistes frases (represente a medida de um ângulo por x)

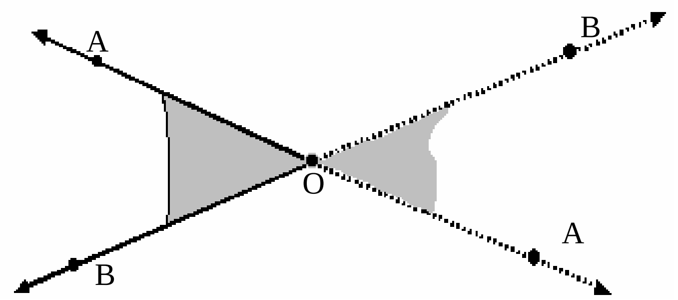
a) Metade do suplemento de um ângulo.
b) O triplo do suplemento de um ângulo.
c) A soma entre um ângulo e o seu suplemento.
d) Metade do complemento menos o suplemento do mesmo ângulo.
e) O complemento mais um terço do suplemento do mesmo ângulo.

Ângulo opostos pelo vértice

Considere o ângulo AÔB da figura a seguir :



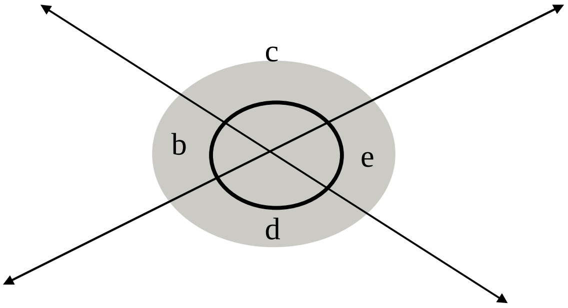
Vamos prolongar os seus lados da seguinte forma :



Observe que agora formamos o ângulo A'ÔB', cujos lados são semi-retas opostas ao lados do ângulo AÔB. Ângulos assim construídos são chamados **opostos pelo vértice**.

Assim:

Dois ângulos são **opostos pelo vértice** (o.p.v) quando os lados de um são semi-retas opostas aos lados do outro.



I . a +c = 180º
(a e c são adjacentes e suplementares)
II. b + c = 180º
(b + c) são adjacentes e suplementares)

Comparando as igualdades I e II, temos:

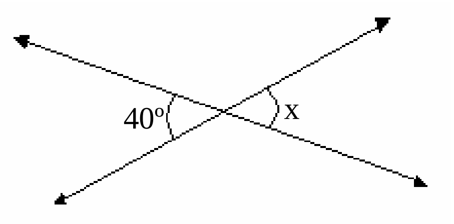
$$a = b$$

Dois ângulos opostos pelo vértice (o.p.v) são sempre congruentes.

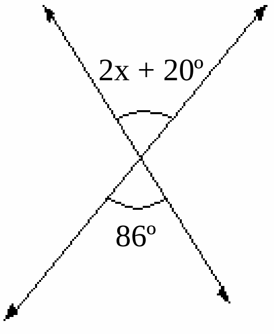
Exercícios

1º) Determine o valor de **x** nos seguintes casos :

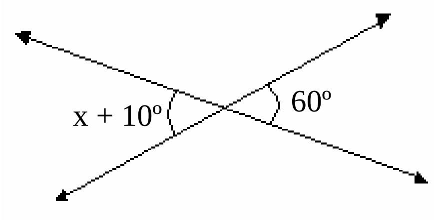
a)



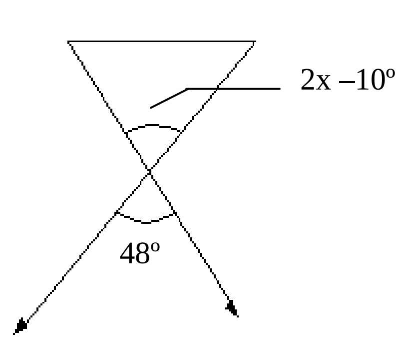
b)



c)

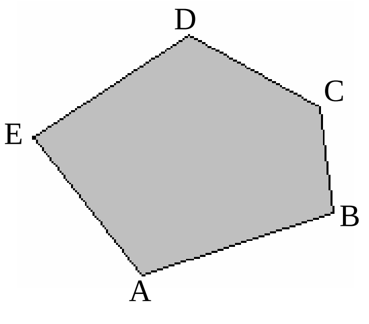


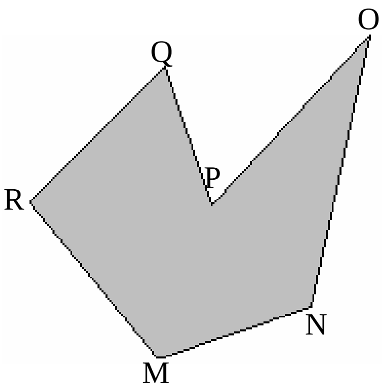
d)



3º Polígonos

Vamos considera as figuras planas a seguir:



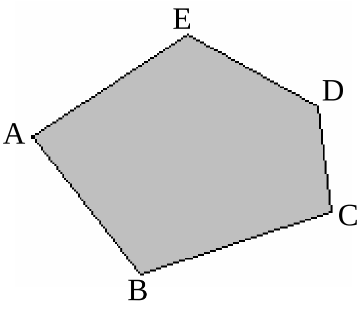


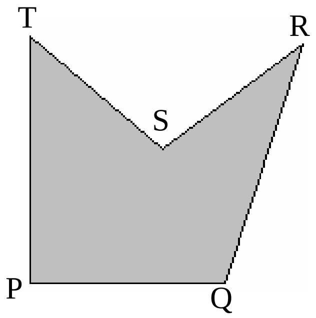
Observe que estas figuras identificam uma linha poligonal fechada e o conjunto dos seus pontos interiores . Cada uma delas é denominada **polígono**.

Assim:

Chama-se **polígono** à reunião entre uma linha poligonal fechada e o conjunto dos seus pontos interiores .

Um polígono pode ser chamado de **convexo** ou **convexo** ou côncavo, de acordo com a região do plano que estiver sendo determinada pelo polígono. Assim:

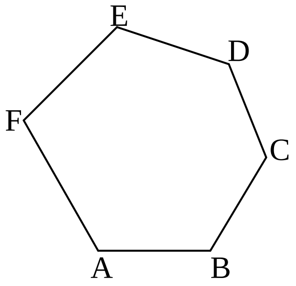




ABCDE é um polígono convexo

PQRST é um polígono côncavo.

Considere o polígono convexo ABCDEF a seguir:



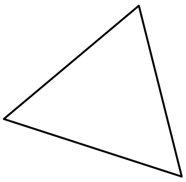
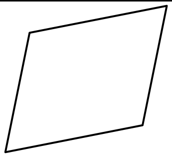
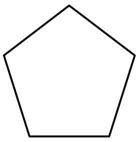
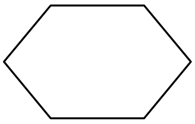
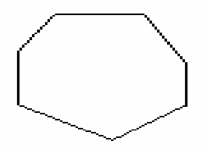
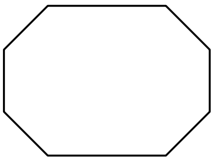
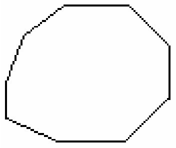
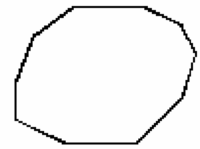
Vamos identificar alguns de seus elementos ;

- Vértices : os pontos A, B, C, D, E e F.
- Lados: os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, . . . , $\overline{FA}$.
- Ângulos internos: os ângulos FAB, ABC, . . . , EFA
- Diagonais : os segmentos determinados por dois vértices não consecutivos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, . . . , $\overline{FD}$.

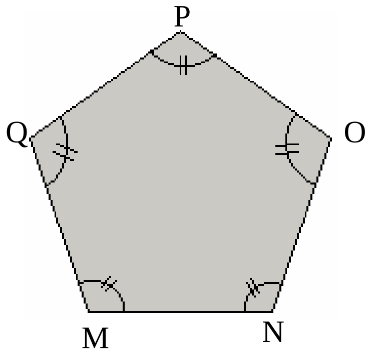
Note que, no polígono convexo ABCDEF, o **número de vértices** é igual ao número de lados , que é igual ao **número de ângulos internos.**

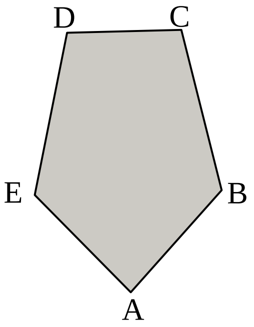
Classificação dos polígonos

Os nomes dos polígonos dependem do critério que estamos utilizando para classificar – lo . Se usarmos o número de ângulos ou o número de lados, teremos a seguinte nomenclatura:

Polígono	**Número de lados ou número de ângulos**	**Nome em função do número de ângulos**	**Nome em função do número de lados**
	3	Triângulo	Trilátero
	4	Quadrângulo	Quadrilátero
	5	Pentágono	Pentalátero
	6	Hexágono	Hexalátero
	7	Heptágono	Heptalátero
	8	Octógono	Octolátero
	9	Eneágono	Enealátero
	10	Decágono	Decalátero

Um outro para classificar um polígono é o da **congruência** de seus **lados** e de seus ângulos internos. Vamos comparar os lados e os ângulos internos dos polígonos:





med (MN) = med(NO) = . . . = med (QM)
med (M) = med (N) = . . . = med(Q)

med(EA) ≠ med(CD)
ou
med(C) ≠ med (D)

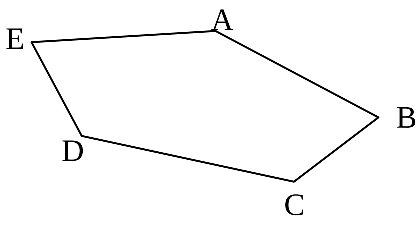
Observe que o polígono MNOPQ tem os lados de medidas iguais e tem também os ângulos internos de medidas iguais, MNOPQ é um polígono regular, enquanto que o ABCDE é um polígono irregular. Assim:

> Um polígono é regular se obedece a duas condições:
> Eqüilátero : todos os lados são congruentes, isto é, têm medidas iguais.
> Eqüiâgulo: todos os ângulos são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

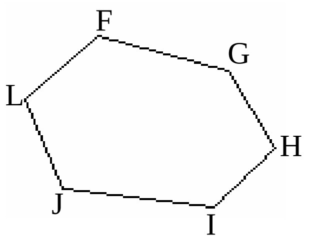
Exercícios

1º) De o nome dos seguintes polígonos , em função do número de ângulos:

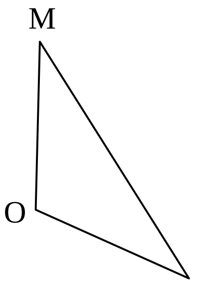
a)



b)



c)



2º) Quantos lados tem o hexágono?

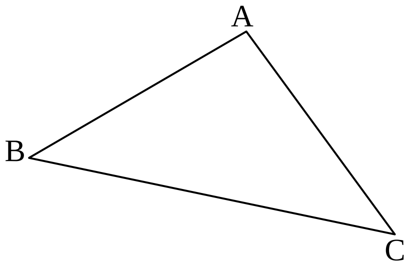
3º) Quantos vértices tem o decágono?

4º) Qual é o nome, em função do número de lados, de um polígono de 4 lados?

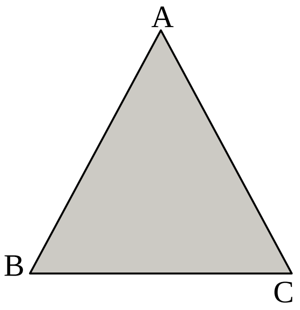
Triângulos: elementos e classificação

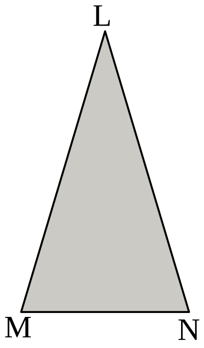
Todo polígono de três é denominado triângulo. Observe o triângulo ABC a seguir, que se indica ∆ABC, e vamos identificar seus principais elementos:

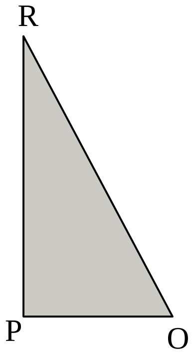
- Vértices: A, B , C
- Lados : AB, AC, BC
- Ângulos internos : A, B , C



Note que no triângulo não é possível traçar diagonais, pois não há vértices não consecutivos.
É possível classificar ou discriminar os triângulos pela comparação **entre as medidas de seus lados** ou, também , quanto à medida de seus **ângulos internos.**







AB ≅ BC ≅ CA

LM ≅ NL ≇ MN

PQ ≇ QR ≇ RP

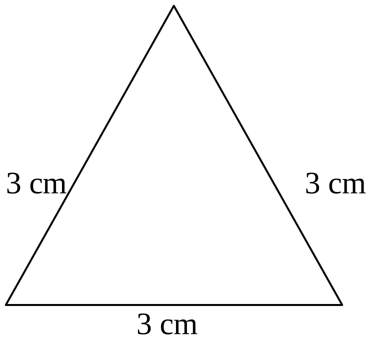
Esse triângulo são classificados , respectivamente , em eqüilátero, isósceles e escaleno.
Assim , podemos definir:

Triângulo eqüilátero : Triângulo que tem três lados de medidas iguais.
Triângulo isósceles: triângulo que tem dois lados de medidas iguais.
Triângulo escaleno: triângulo que tem três lados de medidas diferentes.

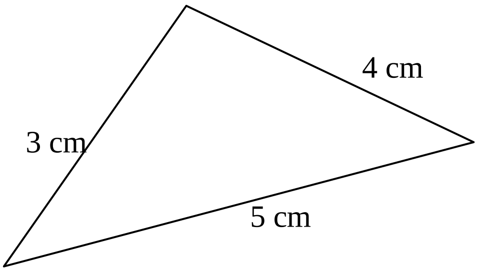
Exercício

1º) Dados os triângulos seguintes , classifique-os quanto aos lados:

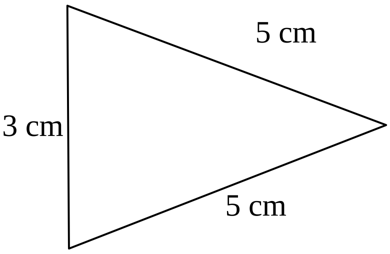
a)



b)

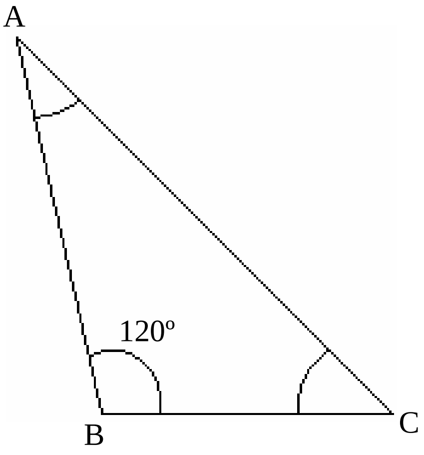


c)

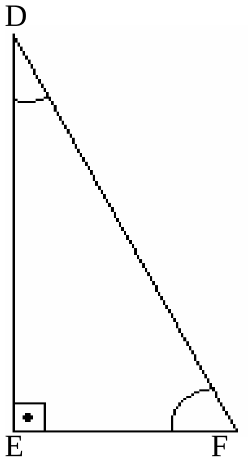


2º) Dados os triângulos seguintes , classifique-os quantos aos ângulos:

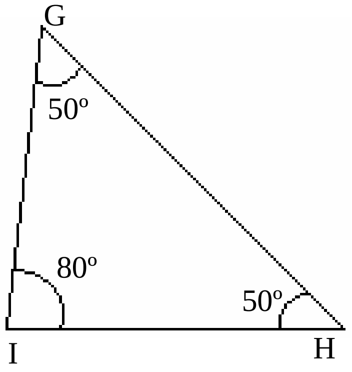
a)



b)

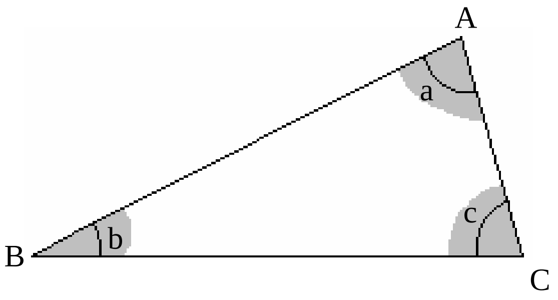


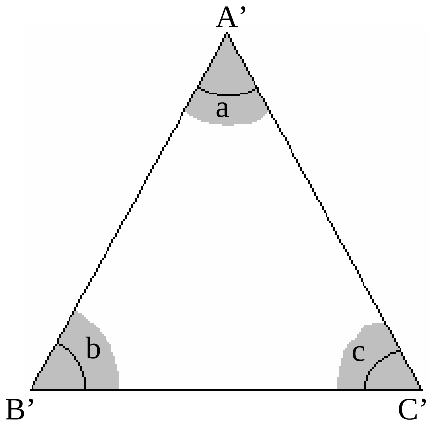
c)



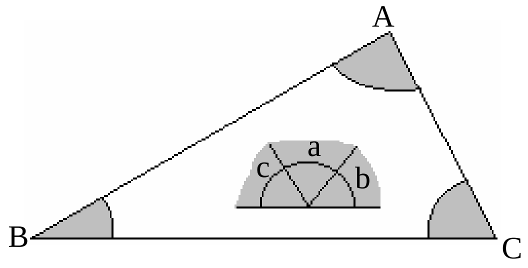
Soma dos ângulos internos de um triângulo

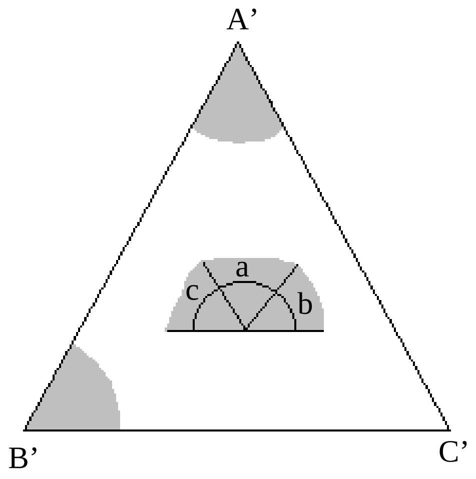
Observe os triângulos a seguir e seus ângulos internos:

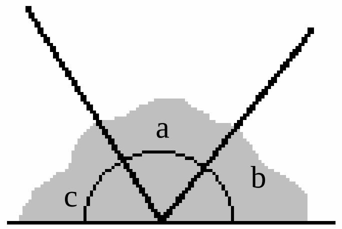


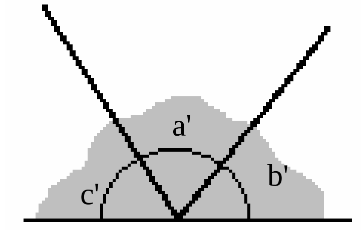


Podemos calcular a soma dos ângulos internos em cada triângulo . Vamos transportar esses ângulos para um vértice comum, interno ou externo aos triângulos.









Chamando **a** à medida de A, **b** à medida de B, e assim por diante, temos para os dois triângulo:

a + b + c = 1 ângulo raso a’ + b’ + c’ = 1 ângulo raso

Assim, para os triângulos ABC e A’B’C’ a soma das medidas de seus ângulos internos é constante e mede 180º.

O processo de determinação da soma dos ângulos internos pode ser aplicado a qualquer triângulo, e a conclusão generalizada é :

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º

Bibliografia a Consultar

1. CASTRUCCI, Benedito et alli. Matemática do 1º grau 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série, SP,F.T.D.
2. CASTRUCCI, Benedito. Nos domínios da Matemática
3. MALVEIRA, Linaldo. Matemática Fácil.
4. MATEMÁTICA Novo Telecurso 1º Grau/Fundação Roberto Marinho e Fundação Bradesco RJ, Rio Gráfica, 1985
5. PIERRO NETO, Scipione di. Matemática do 1º grau 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série, Àtica.
6. SANGIORGI, Osvaldo .Matemática do 1º grau, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série, Companhia Editora Nacional, SP.